Phys. g. 628 f
Dr. Carl E. M. Rohrbach
63, 11
GOTHA.

C.

C Rohrbach.
Berlin 22. Dec. 1848.

Kurzes Elementar-Lehrbuch der gesammten mechanischen Wissenschaften

für

höhere Bürger-, technische, Gewerb- und Militär-Schulen.

Mit vielen Uebungs-Beispielen

von

Dr. Martin Ohm,

ordentl. öffentl. Professor an der Königl. Fr. W. Universität, an der Königl. allgem. Kriegs-Schule, so wie an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin, Ritter des rothen Adler-Ordens vierter Klasse; der Kais. Russ. Akademie d. Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München, so wie auch mehrerer anderen gelehrten Gesellschaften korresp. Mitglied.

Mit 2 lithographirten Figurentafeln.

Berlin, 1840.

Verlag von Theod. Chr. Friedr. Enslin.

Dr. Carl E. M. Rohrbach
GOTHA.

Bayerische Staatsbibliothek München

Aus der Büchersammlung des Dr. Carl Rohrbach.
Berlin 1848
8. Apr. 1889

Bayerische Staatsbibliothek München

Vorrede.

Zur Abfassung gegenwärtiger Schrift ist der Verfasser zunächst dadurch veranlaßt worden, daß dem mechanischen Unterricht an einer der hiesigen Schulen ein Leitfaden zu Grunde gelegt werden sollte, welcher sich unmittelbar an das (im Jahre 1836 zum ersten Male und 1837 in der zweiten Auflage erschienene) kleine „Lehrbuch für den gesammten mathematischen Elementar-Unterricht" anschließt, und nichts voraussetzt, was nicht in letzterem Buche gelehrt wird. — Um jedoch das Werkchen für jede der auf dem Titel erwähnten Schulen brauchbar zu machen, also auch für solche Schulen, welche die Differential- und Integral-Rechnung nicht scheuen, so sind

die Sätze, welche letztere Rechnungen voraussetzen (und welche kaum den 10ten Theil des Ganzen betragen) hier mit aufgenommen, aber mit lateinischen Lettern gedruckt worden, so daß diese Stellen von jedem Lehrer und Schüler mit der größten Leichtigkeit bemerkt und sogleich überschlagen werden können, wenn solche dem augenblicklichen Vermögen des Lernenden noch nicht anpassen sollten.

Es ist bekannt genug, daß man zu Zeit-, Raum-, Massen- und Kraft-Einheiten beliebige Theile wählen kann, und daß man deshalb in den Vorträgen die Einheiten lieber ganz unbestimmt läßt. Wenn der Verfasser in vorliegender Schrift gegen diese Regel gesündigt und entschieden zur Raum-Einheit den rheinischen Fuß, zur Kraft-Einheit das Berliner Pfund, zur Zeit-Einheit die Sekunde mittlerer Zeit, so wie zur Massen-Einheit jede Masse, welche 2g d. h. $31\frac{5}{8}$ Berliner Pfunde wiegt, genommen hat, so wird dies dem Lehrer öfter Veranlassung geben, dem Schüler zu zeigen, wie sich im Allgemeinen nichts, und in den bestimmten Zahlen nur wenig ändert, wenn man andere Einheiten zu Grunde legt. Der Verfasser glaubt aber, daß bei dem ersten Unterricht solche bestimmt gewählte Einheiten dem Schüler mehr Zutrauen geben und ihn zuletzt leichter dahin

führen, die Willkührlichkeit in der Wahl der Einheiten anzuerkennen.

Daß der Verfasser in der Dynamik die unendlich kleine Zeit durch dt bezeichnet, auch wo er keine Differential-Rechnung anwendet, bedarf wohl kaum der Entschuldigung, da das Zeichen doch immer etwas gleichgültiges ist, und der Schüler den Begriff selbst nicht besser auffaßt, ob zu dessen Bezeichnung ein einziger Buchstabe z. B. τ gewählt wird, oder dasselbe Zeichen dt, dessen man sich bei dem späteren Unterricht bedient.

Hinsichtlich mehrerer der Beispiele muß sich der Verfasser seinem Freunde, dem Herrn Professor Lehmus, dankbar verpflichtet erklären. — Unter den im zweiten Anhang vorkommenden Uebungs-Aufgaben kommt eine vor, welche als der allererste Anfang der Anwendung der Mechanik auf die Bewegung der Himmels-Körper angesehen werden kann. Der Verfasser hat solche absichtlich beigegeben, weil der Anfänger daraus abnehmen kann, wie die letztgenannten Anwendungen, mit derselben, ja oft mit weit größerer Leichtigkeit gemacht werden können, wie die übrigen. Wer dieselben weiter getrieben sehen, oder wer überhaupt die ganze Wissenschaft der Statik und Dynamik ausführlicher, vollständiger und gründlicher kennen lernen will, den verweisen wir auf

das in derselben Verlagshandlung 1836 — 1838 in drei Bänden erschienene „Lehrbuch der Mechanik“; und dieses letztere setzt wieder nicht mehr und nicht so viele Vorkenntnisse der höheren Geometrie und der niederen und höheren Analysis voraus, als man in dem 1839 erschienenen „Lehrbuch der gesammten höheren Mathematik in zwei Bänden“ vorfindet.

Berlin, im August 1840.

M. Ohm.

Inhalts-Verzeichniß.

Erster Abschnitt.
Die Statik fester Körper.

Erstes Kapitel. Die Statik des Atoms.

§. 1. Einleitung. Ruhe, Bewegung, Bahn, Geschwindigkeit, Kraft.

§. 2. Vorausgesetzte Eigenschaften der Kräfte.

A. Betrachtung mehrerer Kräfte in einer Ebene.

§. 3. Jede Kraft wird absolut (nicht negativ) gedacht; die Richtung derselben wird durch die Winkel bestimmt, welche sie mit zwei in der Ebene der Kräfte und auf einander senkrecht gedachten Axen macht.

Zerlegung gegebener und in einer Ebene liegender Kräfte, in Seiten-Kräfte, deren Richtungen mit den Axen zusammenfallen. Vereinigung dieser letzteren in zwei. Vereinigung dieser letzteren beiden, die auf einander senkrecht stehen, in eine einzige, wenn nicht Gleichgewicht ist.

§. 4. 1) Gleichgewichts-Bedingungen für Kräfte die in einer Ebene liegen. 2) Im Falle nicht Gleichgewicht ist, Berechnung der mittleren Kraft.

Anmerkung 1. Es ist der Atom O im Gleichgewicht, so oft die Summe der Projektionen der Kräfte auf zwei beliebige Gerade (in der Ebene), jede für sich der Null gleich ist.

Anmerkung 2. Die Gleichgewichts-Gleichungen werden auch so geschrieben: $\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0$, $\Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0$.

Anmerkung 4. Statt der $\cos\beta$ kann man auch $\sin\alpha$ setzen, wenn α von 0 bis 360° gezählt werden.

§. 5. Das Kräften-Parallelogramm.

§. 6. Folgerungen aus demselben für das Gleichgewicht dreier Kräfte und für die Zusammensetzung von beliebig viel Kräften durch geometrische Konstruktion.

B. Betrachtung mehrerer Kräfte im Raume.

§. 7. Zerlegung einer Kraft P in 3 Seiten-Kräfte und Zusammensetzung dreier der letzteren in eine mittlere Kraft.

§. 8. 1) Gleichgewichts-Bedingungen für mehrere Kräfte im Raume. 2) Im Falle nicht Gleichgewicht ist, Berechnung der mittleren Kraft ihrer Lage und Größe nach.

Zweites Kapitel. Von parallelen Kräften, die einen festen Körper gleichzeitig angreifen.

§. 9. Grund-Principien. 1) Festes System. 2) Jeder Punkt in der Richtung der Kraft kann zum Angriffs-Punkt genommen werden.

§. 10. Vereinigung zweier parallelen Kräfte in eine einzige, wenn sie nicht ein Gegen-Paar bilden.

§. 11. Vereinigung beliebig vieler parallelen Kräfte im Raume 1) in eine einzige, wenn sie nicht 2) im Gleichgewicht sind, und auch nicht 3) ein Gegen-Paar liefern.

§. 12. Schwer-Punkt im Allgemeinen.

Drittes Kapitel. Praktische Auffindung der Schwer-Punkte.

A. Für den Elementar-Unterricht.

§. 13. Begriff des Schwer-Punkts einer homogenen Linie, Fläche, oder eines homogenen Körpers.

§. 14. Auffindung des Schwer-Punktes 1) einer Geraden, 2) eines Dreiecks, 3) eines Vierecks, 4) einer beliebigen ebenen geradlinigen Figur, 5) eines Umfanges (einer gebrochenen Linie), 6) eines Theils des Umfanges eines regulären Vielecks, 7) eines Kreisbogens, 8) eines Kreis-Sektors, 9) eines Kreis-Segments.

§. 15. Desgl. 1) eines Prisma oder Cylinders, 2) der Oberfläche desselben, 3) einer Pyramide oder eines Kegels, 4) der Oberfläche der Pyramide oder des Kegels, 5) einer Kugel-Mütze, 6) eines Kugel-Sektors, 7) eines Kugel-Segments.

§. 16. Wenn ein Körper aus mehreren Theilen besteht, oder als Differenz zweier anderen erscheint.

B. Für den höheren Unterricht.

§. 17. Lehnsätze aus der Differential- und Integral-Rechnung.

§. 18. Schwer-Punkt 1) eines einfach gekrümmten, 2) eines doppelt gekrümmten Bogens.

§. 19. Schwer-Punkt 1) einer ebenen, 2) einer krummen Flächen-Figur, 3) einer Umdrehungs-Oberfläche.
§. 20. Schwer-Punkt 1) eines Körpers im Allgemeinen und 2) eines Umdrehungs-Körpers im Besonderen.
§. 21. Die Guldinische Regel.

Viertes Kapitel. Von beliebigen Kräften, deren Richtungen aber alle in einer und derselben Ebene liegen, und welche einen festen Körper gleichzeitig angreifen.
§. 22. Theorie der Gegen-Paare.
§. 23. Statisches Moment. — Jede Kraft wird ersetzt, durch eine mit ihr gleiche und parallele und noch zwei andere die ein Gegen-Paar bilden. — Beliebig viel Kräfte in der Ebene betrachtet.
§. 24. Resultate. 1) Gleichgewicht der Kräfte, 2) Reduktion derselben auf ein Gegen-Paar, 3. u. 4) Reduktion derselben auf eine einzige mittlere Kraft.
§. 25. Dazu gehörige Rechnungen in derselben Ordnung.

Fünftes Kapitel. Anwendungen der statischen Lehren der vorhergehenden Kapitel.
§. 26. Loses System. Principien für das Gleichgewicht desselben.
§. 27. Reibung; wie solche in Rechnung gebracht wird.
§. 28—§. 33. Mehrere Probleme in welchen die Drucke gegen Unterlager und Widerlager bestimmt werden.
§. 34. Die schiefe Ebene.
§. 35. Der Keil.
§. 36. Der Hebel.
§. 37. Das Rad an der Welle, Haspel, Winde (Göpel).
Anmerkung 1. Steifigkeit der Seile.
§. 38. Die feste Rolle.
§. 39. Die feste Rolle in ihrem einfachsten Falle.
§. 40. Die lose Rolle.
§. 41. Dieselbe in ihrem einfachsten Falle.
§. 42. Der Rollenzug.
§. 43. Der Flaschenzug.

Sechstes Kapitel. Von beliebigen Kräften, welche, ohne mit ihren Richtungen in einer und derselben Ebene zu liegen, einen festen Körper gleichzeitig angreifen.
§. 44. Fortsetzung der Theorie der Gegen-Paare.
§. 45. Vereinigung und Gleichgewicht von beliebig viel Gegen-Paaren im Raume.
§. 46. u. §. 47. Vereinigung und Gleichgewicht von beliebig viel Kräften im Raume. Sie halten sich a) im Gleichgewicht (wenn $X = Y = Z = L = M = N = 0$ ist); oder b) reduciren sich auf eine einzige Kraft

(wenn die Bedingung $NX + MY + NZ = 0$ erfüllt ist), oder c) sie reduciren sich auf ein Gegen-Paar, d. h. auf zwei parallele, gleiche aber entgegengesetzte Kräfte (wenn $X = Y = Z = 0$, aber nicht $L = M = N = 0$ ist), oder endlich d) sie reduciren sich (auf eine Kraft und ein zugehöriges Gegen-Paar, d. h.) auf zwei Kräfte, die nicht in einer und derselben Ebene liegen.

§. 48. Andere Form der Gleichgewichts-Gleichungen.

§. 49. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Siebentes Kapitel. Weitere Anwendungen der statischen Lehren der vorhergehenden Kapitel.

§. 50. Drucke auf Unterlagen.

§. 51. Ein Beispiel im Raume.

§. 52. Die Schraube.

§. 53. Von der Stabilität der Mauern.

§. 54. Vom Seil-Polygon.

Zweiter Abschnitt.

Die Dynamik fester Körper.

Achtes Kapitel. Die Bewegung des Atoms.

A. Die geradlinige Bewegung.

§. 55. Beschleunigende Kraft.

§. 56. Konstante Bewegung eines Atoms.

§. 57. Gleichförmig beschleunigte und gleichförmig verzögerte Bewegung.

§. 58. Veränderliche Bewegung des Atoms überhaupt.

§. 59. Freier Fall und Fall auf der schiefen Ebene.

B. Krummlinige Bewegung des Atoms in einer Ebene.

§. 60. Die parabolische Flugbahn.

§. 61. Allgemeine Theorie der freien krummlinigen Bewegung des Atoms in einer Ebene.

§. 62. Vom mathematischen Pendel. Winkel-Weg. Winkel-Geschwindigkeit.

§. 63. Allgemeine Theorie der Bewegung des Atoms in beliebig vorgeschriebener aber ebener Bahn.

§. 64. Von der Centrifugal-Kraft.

Neuntes Kapitel. Einleitung in die Bewegung fester Körper.

§. 65. Masse; Dichtigkeit; Tabelle der specifischen Gewichte.

§. 66. Fortschreitende, drehende, allgemeine Bewegung.

§. 67. „Größe der Bewegung" im Gegensatz zur „bewegenden Kraft".

§. 68. Vom centralen Stoße zweier Körper.

Anmerkung. Attwood'sche Fallmaschine.

Zehntes Kapitel. Allgemeines Gesetz der Bewegung fester Körper und einige von dessen Anwendungen.

§. 69. Allgemeines Gesetz der Bewegung fester Körper (das d'Alembert-sche Princip).

§. 70 — 75. Anwendungen dieses Gesetzes; darunter (im §. 74. der physikalische und im §. 75. der ballistische Pendel).

§. 76. Reduktion der Massen und Kräfte auf einen Punkt bei drehender Bewegung ohne Reibung.

§. 77. Beispiel einer nicht drehenden Bewegung.

Eilftes Kapitel. Von den Trägheits-Momenten. §.78.—§.80.

Dritter Abschnitt.

Die ersten Grundlehren der Hydraulik,

oder

die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung tropfbar flüssiger Körper.

Zwölftes Kapitel. Die ersten Grundlehren der Hydrostatik.

Erste Abtheilung. Vom Druck des still stehenden Wassers. §. 81. — §. 84.

Zweite Abtheilung. Von den schwimmenden Körpern. §. §. 85. 86. 87.

Dreizehntes Kapitel. Die ersten Grundlehren der Hydrodynamik.

Erste Abtheilung. Wasser-Mengen-Bestimmungen. §. 88. — §. 92.

Zweite Abtheilung. Von der Verengung des Quer-Profils eines Flusses und von dem Rückstau. §. 93. §. 94.

Dritte Abtheilung. Von der Zeit-Bestimmung bei Ausleerung und Füllung prismatischer Gefäße. §. 95.

Vierte Abtheilung. Von der Kraft des bewegten Wassers; von dem Stromquadranten und den ober- und unterschlächtigen Wasser-Rädern. §. 96. — §. 100.

Fünfte Abtheilung. Vom Heber und den Pumpen. §. 101. — §. 106.

Erster Anhang. Von der Festigkeit der Materialien. §. 107. — §. 114.

Zweiter Anhang. Vermischte Uebungs-Beispiele.

§. 115. Schwer-Punkts-Aufgaben.

§. 116. Aufgaben zur Bestimmung von Drucken.

§. 117. Theorie der Krämer-Wage.
§. 118. Theorie der Schnell-Wage.
§. 119 — §. 126. Aufgaben über die Stabilität der Mauern, Widerlager etc.
§. 127 — §. 134. Anwendungen des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.
§. 135 — §. 141. Dynamische Aufgaben.
§. 142. Noch eine hydrostatische Aufgabe.

Bayerische Staatsbibliothek München

Erster Abschnitt.

Die Statik fester Körper.

Erstes Kapitel.

Die Statik des Atoms.

§. 1.

Einleitung.

1) Wir denken uns alle Materie aus unendlich kleinen untheilbaren Theilchen bestehend, und nennen letztere Atome, zuweilen auch Punkte.

2) Zu den Eigenschaften der Materie gehört auch die, beweglich zu seyn. — Jeder einzelne Atom einer bewegten Materie hat seine ihm eigenthümliche Bewegung.

3) Die Bewegung eines Atoms ist entweder geradlinig oder krummlinig, und die von ihm beschriebene gerade oder krumme Linie heißt seine Bahn. Die Bewegung mag aber geradlinig oder krummlinig seyn, so kann sie doch wieder in unendlich kleinen und gleichen Zeit-Theilchen entweder immer ebenfalls gleiche, oder ungleiche Bahn-Theilchen beschreiben; im erstern Fall heißt sie konstant oder gleichförmig, im andern Fall dagegen veränderlich oder ungleichförmig.

4) Bei der konstanten Bewegung sagt man: „sie habe an jeder Stelle der Bahn eine und dieselbe (konstante) Ge-

schwindigkeit." Bei der veränderlichen Bewegung sagt man: „sie habe an jeder Stelle der Bahn eine verschiedene (veränderliche) Geschwindigkeit", welche letztere größer oder kleiner genannt wird, je nachdem die in dem unendlich kleinen und gleichen Zeit-Theilchen beschriebenen Bahn-Theilchen größer oder kleiner werden. — Und drückt man die (geradlinigen oder krummlinigen) Bahn-Theile in irgend eine bestimmte Längen-Einheit aus (z. B. in den rheinischen Fuß), die Zeit-Theile aber in irgend eine Zeit-Einheit (z. B. in die Sekunde mittlerer Zeit), so kann man den Begriff „Geschwindigkeit der Bewegung an irgend einer Stelle der Bahn" dadurch als (unbenannte) Zahl ausdrücken, daß man das in dem unendlich kleinen und immer gleich gedachten Zeit-Theilchen, an dieser Stelle der Bahn beschriebene Bahn-Theilchen, durch das Zeit-Theilchen selbst dividirt.

5) Jede Bewegung eines Atoms hat also an jeder Stelle der Bahn eine bestimmte Geschwindigkeit und eine bestimmte Richtung (welche letztere, wenn die Bewegung krummlinig ist, mit der geradlinigen Tangente an die Bahn in dieser Stelle zusammenfällt). — Die Aenderung einer Bewegung an einer Stelle der Bahn kann also darin bestehen, entweder a) daß sie die Geschwindigkeit allein, oder b) die Richtung allein, oder c) die Geschwindigkeit und die Richtung zugleich ändert.

6) Ohne Ursache kann keine Aenderung der Bewegung eintreten. Die Ursache einer solchen Aenderung nennen wir aber Kraft, und wir beurtheilen die Kraft nach der Aenderung, die sie hervorbringt.

Am einfachsten tritt aber diese Aenderung in dem Fall auf, wo der Atom aus der Ruhe in Bewegung übergeht. Die augenblicklich vorhandene Geschwindigkeit und Richtung der Bewegung ist dann ganz allein der eben gewirkt habenden Kraft beizumessen, und sie werden deshalb Größe und Richtung dieser Kraft genannt. — Jede Kraft hat also eine Größe und eine Richtung.

§. 2.

Von den Kräften setzen wir folgendes voraus:

1) Wirken zwei Kräfte, deren Größe bezüglich durch die Zahlen P und Q ausgedrückt ist, gleichzeitig und in einer und derselben Richtung auf einen Atom, so ist die Wirkung dieselbe, wie wenn eine einzige Kraft in derselben Richtung auf den Atom wirkte, deren Größe $P+Q$ ist.

2) Wirken dieselben Kräfte wiederum gleichzeitig aber in genau entgegengesetzten Richtungen auf den Atom, so ist die einzige Kraft, welche dafür gesetzt werden kann, in der Richtung der Kraft P, und der Größe nach durch $P-Q$ ausgedrückt, sobald man nur zu gleicher Zeit voraussetzt, daß, im Falle $P<Q$ seyn, also die Differenz $P-Q$ negativ werden sollte, solches anzeige, daß eine absolute Kraft $Q-P$ dasmal in der, der P entgegengesetzten Richtung wirke, d. h. in der Richtung von Q.

Ist aber $P=Q$, so vernichten sich diese Kräfte gegenseitig, und man sagt dann: „sie halten sich im Gleichgewicht.“

3) Wirken endlich zwei Kräfte X und Y gleichzeitig auf einen Atom O in Richtungen OX und OY (Fig. 1.), welche auf einander senkrecht stehen, so kann man dafür eine einzige Kraft P setzen, welche der Größe und der Richtung nach auf folgende Weise bestimmt wird. Man denke sich von O aus auf OX und OY zwei Längen OA und OB abgetragen, welche bezüglich die Zahlen X und Y vorstellen, so daß $OA=X$, $OB=Y$ ist. Man ziehe dann das Rechteck OACB aus; und die Diagonale OC drückt die Größe und die Richtung von P aus *).

---

*) Wendet man alle Folgerungen, welche aus diesen Voraussetzungen gezogen werden, auf wirkliche, in der Natur vorkommende Kräfte an, und stimmen diese Folgerungen mit den Natur-Erscheinungen überein, so hat man eine fortlaufende Bestätigung, daß die Naturkräfte diesen Voraussetzungen entsprechen.

A. Betrachtung von Kräften, welche einen Atom O gleichzeitig angreifen, deren Richtungen aber alle in einer und derselben Ebene liegen.

§. 3.

Bezeichnungen und Folgerungen.

1) Wir bezeichnen hier immer die vorkommenden Kräfte durch P_1, P_2, P_3, ... P_n, etc.; die einzige mittlere Kraft, welche statt aller dieser Kräfte gesetzt werden kann, durch P_0, und wir drükken alle diese Kräfte durch absolute Zahlen aus, welche auf irgend eine Kraft-Einheit bezogen gedacht werden. Alle diese P sind also in den Rechnungen als positive Zahlen anzusehen, und sind nie negativ. — Diese Zahlen, indem man sie auf eine bestimmte Längen-Einheit bezieht, kann man dann auch als Längen versinnlicht darstellen.

2) Die Richtung einer jeden dieser Kräfte P bestimmen wir immer dadurch, daß wir in der Ebene der Kräfte durch den angegriffenen Atom zwei auf einander senkrechte, übrigens beliebige (Koordinaten-) Axen OX und OY legen und die (jedesmal spitzen oder stumpfen) Winkel bestimmen, welche die Richtung der Kraft P mit OX und OY macht. (Man darf aber dabei nie die entgegengesetzten Richtungen zulassen.) Diese Winkel bezeichnen wir immer durch α und β, d. h. durch α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3; etc. α_0, β_0.

3) In allen 4 verschiedenen Lagen (Fig. 1.) dieser Kräfte P, ist doch allemal

$$\text{A)}\ (\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 = 1 \ \text{und B)}\ \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \pm tg\,\alpha,$$

wo das (+) Zeichen gilt, so lange die Richtung der Kraft P oberhalb OX fällt; außerdem aber das (—) Zeichen.

4) Sollte eine Kraft P_5 mit der Richtung OX selbst zusammenfallen, so würde der zugehörige Winkel $AOX = \alpha_5$ der Null gleich genommen werden, während dann $AOY_5 = \beta_5 = 90^0$ ist. — Fiele aber eine Kraft P_6 genau mit der entgegengesetzten Rich-

tung von OX zusammen, so würde sie selbst ihrer Größe nach in der Rechnung immer noch durch eine absolute (nicht negative) Zahl ausgedrückt werden müssen, aber es würde jetzt $\alpha_6 = 180^0$ und $\beta_6 = 90^0$ seyn. — Ganz Analoges gilt für die andere Axe OY.

5) Jede Kraft P (Fig. 1.), welche mit den beiden auf einander senkrechten Axen OX und OY bezüglich die Winkel α und β macht, zerlegt sich (nach §. 2. Nr. 3.) sogleich in zwei Seiten-Kräfte X und Y, welche aus den Gleichungen

$$\text{I. } P \cdot cos\,\alpha = X \quad \text{und} \quad \text{II. } P \cdot cos\,\beta = Y$$

berechnet werden, sobald man nur, im Falle α oder β stumpf seyn, also $cos\,\alpha$ oder $cos\,\beta$, mithin X oder Y als negative Zahlen sich zeigen sollten, die Kraft X oder Y selbst in der entgegengesetzten Richtung wirkend sich denkt.

Aus den Gleichungen I. und II. folgt sogleich, wenn man sie quadrirt und addirt,

$$\text{III. } P = +\sqrt{X^2+Y^2};\ cos\,\alpha = \frac{X}{P},\ cos\,\beta = \frac{Y}{P};$$

so daß danach, wenn die Seiten-Kräfte X und Y (als positive oder als negative Zahlen in Rechnung gebracht) gegeben sind, wiederum augenblicklich aus III. sowohl die Größe P als auch die Richtung (α und β) der mittlern Kraft berechnet werden kann. — Man kann aber auch die Gleichung II. durch die I. dividiren, und man erhält

$$\text{IV. } \pm tg\,\alpha = \frac{Y}{X} \quad \text{und} \quad P = \frac{X}{cos\,\alpha} \quad (\text{aus I.}).$$

Danach berechnen sich der Winkel α und die Zahl P noch leichter. Man muß aber den Quotienten $\frac{Y}{X}$, auch wenn er negativ seyn sollte, absolut (positiv) nehmen, dazu den spitzen Winkel suchen, dessen Tangente er ist, und dieser spitze Winkel selbst, oder sein stumpfer Nebenwinkel ist dann der gesuchte Winkel α; der spitze nämlich, wenn X positiv, der stumpfe dagegen, wenn X negativ seyn sollte. Der Winkel β ist spitz oder stumpf, je nachdem Y positiv oder negativ ist; und weiß man dieß, so ist die Richtung der Kraft P genau bestimmt, und braucht man nicht β selber noch genauer auszuwerthen.

6) Sind beliebig viele Kräfte P_1, P_2, P_3, $\cdots P_n$ gegeben,

welche einen Atom gleichzeitig angreifen, die aber mit ihren Richtungen in einer und derselben Ebene liegen, so kann man nach Nr. 5. jede derselben in zwei Seiten-Kräfte zerlegen, dann diese Seiten-Kräfte in jeder der Axen OX und OY (nach §. 2. Nr. Nr. 1. und 2.) durch Addition oder Subtraktion derselben in eine einzige X und Y vereinigen (wenn sie sich nicht im Gleichgewicht halten) und so zuletzt entweder die Ueberzeugung vom Gleichgewicht, oder zwei Kräfte X und Y erhalten, die dann wieder (nach Nr. 5.) in eine einzige mittlere Kraft P_0 vereinigt werden können, welche statt aller gegebenen und gleichzeitig wirkenden Kräfte $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$ gesetzt werden kann.

§. 4.

Dies führt aber zu folgenden Resultaten:

1) Kräfte $P_1, P_2, P_3 \cdots P_n$, welche gleichzeitig einen Atom O angreifen, deren Richtungen in einer und derselben Ebene liegen und mit den, in derselben Ebene auf einander senkrecht gedachten Axen OX und OY bezüglich die Winkel

$$\alpha_1, \beta_1; \quad \alpha_2, \beta_2; \quad \alpha_3\ \beta_3; \cdots \alpha_n, \beta_n$$

machen, — halten sich einander im Gleichgewicht, so oft

I. $P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + P_3 \cdot \cos\alpha_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\alpha_n = 0$

und II. $P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2 + P_3 \cdot \cos\beta_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\beta_n = 0$

ist; und diese zwei Gleichungen reichen aus und sind nothwendig, wenn der so angegriffene Atom im Gleichgewicht seyn soll.

2) Halten sich dieselben Kräfte nicht im Gleichgewicht, so lassen sie sich allemal in eine (einzige) mittlere Kraft P_0 vereinigen (zusammensetzen), welche mit den Axen OX und OY die Winkel α_0 und β_0 macht, wenn P_0 und α_0 und β_0 auf folgende Weise gefunden werden. Man findet nämlich zuerst X und Y aus den Gleichungen

a) $P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + P_3 \cdot \cos\alpha_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\alpha_n = X$

b) $P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2 + P_3 \cdot \cos\beta_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\beta_n = Y$

und aus diesen (positiven oder negativen) Werthen von X und Y berechnet man dann P_0 und α_0, β_0 mittelst der Gleichungen

I. $P_0 \cdot \cos\alpha_0 = X$; II. $P_0 \cdot \cos\beta_0 = Y$;

und zwar kann dies nach jeder der beiden im §. 3. Nr. 5. beschriebenen Methoden geschehen, also entweder dadurch, daß man

$$\text{III.}\quad P_0 = +\sqrt{X^2+Y^2} \text{ und } \cos\alpha_0 = \frac{X}{P_0}, \cos\beta_0 = \frac{Y}{P_0},$$

oder daß man

$$\text{IV.}\qquad \pm tg\,\alpha_0 = \frac{Y}{X} \text{ und } P_0 = \frac{X}{\cos\alpha_0}$$

zu Hilfe nimmt.

Anmerkung 1. Denkt man sich die Kräfte $P_1, P_2, \cdots P_n$ ihrer Größe und Richtung nach durch Linien vorgestellt (Fig. 1.), so drücken die Produkte $P_1 \cdot \cos\alpha_1$, $P_2 \cdot \cos\alpha_2$ rc. die Projektionen dieser Linien P_1, P_2 rc. auf die Axe OX aus, positiv oder negativ genommen, je nachdem diese Projektionen auf OX selber, oder auf ihre Verlängerung jenseits O fallen. Die Bedingungen des Gleichgewichts §. 4. Nr. 1. I. II. können daher so gestellt werden: „Zum Gleichgewicht des Atoms ist nothwendig und ausreichend, daß die Summe der Projektionen der Kräfte auf jede von zwei auf einander senkrechten Axen, der Null gleich ist, wenn nur diejenigen Projektionen als negativ in Rechnung gebracht werden, welche nicht in die Richtung der Axen selber, sondern in ihre entgegengesetzte Richtung fallen.

Weil man aber die Axe OX beliebig legen kann, so giebt es, im Falle die Kräfte im Gleichgewichte sind, beliebig viele solcher Gleichungen. Eine einfache trigonometrische Rechnung (S. Lehrb. d. Mech. Th. I. §.§. 25. 26.) zeigt dabei, daß von je zweien dieser Gleichungen die übrigen alle algebraische Folgerungen sind. Also ist zum Gleichgewicht dieser Kräfte nothwendig und ausreichend, daß die Summe der Projektionen derselben auf jede von zwei Axen, die einen beliebigen Winkel mit einander machen, der Null gleich ist, vorausgesetzt, daß die den Atom O angreifenden Kräfte alle in einer und derselben Ebene liegen, und daß diese beiden Axen in derselben Ebene gedacht werden.

Anmerkung 2. Gewöhnlich schreibt man die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht §. 4. Nr. 1. I. und II. bloß so:

$$\text{I. } \Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \text{II. } \Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0,$$

wo P und α nach und nach alle P_1, α_1; P_2, α_2; ... P_n, α_n vorstellen, und wo das Summen-Zeichen Σ andeutet, daß die Summe aller dieser durch $P \cdot \cos\alpha$ vorgestellten Produkte genommen werden soll; während $\Sigma(P \cdot \cos\beta)$ die analoge Bedeutung hat.

Anmerkung 3. Hat man die beiden Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts im Gedächtniß, so kann man auch sogleich daraus, wenn Kräfte nicht im Gleichgewicht sind, die mittlere Kraft P_0 finden. Man denkt sich nämlich eine Kraft P_{n+1}, welche der gesuchten P_0 gleich und genau entgegengesetzt ist, so ist solche mit den n übrigen Kräften $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$ im Gleichgewicht. Schreibt man nun die beiden Gleichungen des Gleichgewichts zwischen diesen $n+1$ Kräften hin, so kann man daraus P_{n+1} und α_{n+1}, β_{n+1} sogleich berechnen, während dann $P_0 = P_{n+1}$, $\alpha_0 = 180^0 - \alpha_{n+1}$ und $\beta_0 = 180^0 - \beta_{n+1}$ gefunden werden.

Umgekehrt könnte man auch die Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts zwischen n Kräften $P_1, P_2, \cdots P_n$ dadurch finden, daß man $n - 1$ dieser Kräfte in eine einzige vereinigte, und dann die Gleichungen hinschriebe, welche erfüllt seyn müssen, damit diese mittlere Kraft, der n^{ten} Kraft genau gleich und genau entgegen sey.

Anmerkung 4. Besonders wichtig ist das nachstehende: In allen diesen Rechnungen kann man nämlich überall statt $\cos\beta_1$, $\cos\beta_2$, $\cos\beta_3$, ꝛc. $\cos\beta_0$ bezüglich $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$, $\sin\alpha_3$, ꝛc. $\sin\alpha_0$ setzen, sobald man nur die Winkel α bis zu 360^0 zählt, so daß $\alpha > 180^0$ wird, so oft die Kraft unterhalb OX (Fig. 1.) zu liegen kommt, weil nur unter dieser Voraussetzung die Kosinus der Winkel β durch die Sinus der Winkel α nicht bloß der Größe, sondern auch dem Vorzeichen nach ersetzt werden, während der Kosinus eines Winkels α der Größe und dem Vorzeichen nach derselbe bleibt, man mag statt α irgend einen Winkel setzen, oder dessen Ergänzung zu 360^0.

Beispiel 1. Ein Atom O werde von 4 Kräften angegriffen, welche in einer und derselben Ebene wirken und welche sich wie die Zahlen 5, 7,

6 und 4 verhalten (z. B. 5 Ctr., 7 Ctr., 6 Ctr. und 4 Ctr.), und welche der Größe und Richtung nach durch die Linien OA, OB, OC und OD (Fig. 2.) vorgestellt sind. Es sind dabei bekannt die Winkel

$$AOB = 50^0, \quad BOC = 80^0, \quad COD = 140^0.$$

Man soll die Kraft Z finden, ihrer Größe und Richtung nach, welche mit diesen 4 gegebenen Kräften das Gleichgewicht hält, vorausgesetzt, daß sie alle den Atom O gleichzeitig angreifen.

Man bezeichne die Kräfte der Ordnung nach durch P_1, P_2, P_3, P_4, so daß $P_1 = OA = 5$, $P_2 = OB = 7$, $P_3 = OC = 6$, $P_4 = OD = 4$ ist, und bezeichne auch die gesuchte Kraft z durch P_5. — Man lege dann durch O zwei beliebige auf einander senkrechte Axen OX und OY, von denen man aber die eine OX mit einer der Kräfte, z. B. mit $P_1 = OA = 5$ selbst zusammenfallen lassen kann. Man berechne dann die Winkel α, welche die Kräfte mit OX, und die Winkel β, welche die Kräfte mit OY machen, und man findet $\alpha_1 = AOX = 0$, $\alpha_2 = BOX = 50^0$, $\alpha_3 = COX = 50^0 + 80^0 = 130^0$; $\alpha_4 = DOX = 360^0 - 50^0 - 80^0 - 140^0 = 90^0$ *). — Desgleichen findet sich $\beta_1 = AOY = 90^0$; $\beta_2 = BOY = 40^0$; $\beta_3 = COY = COX - 90^0 = \alpha_3 - 90^0 = 40^0$; $\beta_4 = DOY = DOX + 90^0 = 180^0$. — Die Winkel, welche die gesuchte Kraft P_5 mit den Axen OX und OY macht und welche ebenfalls gesucht werden, sind durch α_5 und β_5 bezeichnet.

Diese Werthe setzt man nun in die Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts §. 4. Nr. 1. I. und II., und man erhält nach gehöriger Reduktion

$$\left.\begin{aligned} 5 + cos\,50^0 + P_5 \cdot cos\,\alpha_5 &= 0 \\ 13 \cdot cos\,40^0 - 4 + P_5 \cdot cos\,\beta_5 &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots (A).$$

Weil aber aus diesen Gleichungen $P_5 \cdot cos\,\alpha_5$ und $P_5 \cdot cos\,\beta_5$ gefunden werden können, so berechnen sich aus ihnen sowohl P_5 als auch α_5 und β_5 nach denselben zwei Methoden, nach welchen in §. 3. Nr. 5. P und α und β berechnet werden konnten. Die erstere dieser beiden Methoden giebt sogleich

$$P_5 = +\sqrt{42 + 10 \cdot sin\,40^0 - 104 \cdot cos\,40^0 + 168 \cdot cos\,40^{0^2}};$$

und ist hiernach P_5 berechnet, so hat man noch aus den obigen beiden Gleichungen (A.)

$$cos\,\alpha_5 = -\frac{5 + cos\,50^0}{P_5} \text{ und } cos\,\beta_5 = \frac{4 - 13 \cdot cos\,40^0}{P_5},$$

so daß hier $cos\,\alpha_5$ und $cos\,\beta_5$ beide negativ, also α_5 und β_5 stumpf sind. Die Lage der gesuchten Kraft kann daher in der Figur (3.) durch die Linie OE vorgestellt werden.

Nach der andern Methode bringt man in den Gleichungen A. die Glieder $P_5 \cdot cos\,\alpha_5$ und $P_5 \cdot cos\,\beta_5$ auf die andere Seite, und dividirt dann beide Gleichungen durch einander; man erhält dann

$$\pm tg\,\alpha_5 = \frac{-4 + 13 \cdot cos\,40^0}{5 + cos\,50^0} = \frac{5{,}9585785}{5{,}6427876}$$

---

*) Wollte man aber statt der $cos\,\beta$ lieber $sin\,\alpha$ in die Rechnung bringen, so müßte man (nach Anmerkung 4.) $\alpha'_4 = 270^0$ nehmen.

Nimmt man nun diesen Quotienten, auch wenn er (was jedoch hier nicht der Fall ist) negativ seyn sollte, positiv, und sucht man dazu, indem man ihn als eine Tangente ansieht, den (spitzen) Winkel, so ist solcher oder sein (stumpfer) Nebenwinkel, der gesuchte Winkel α_5. Welcher von beiden aber, ob der erstere oder der letztere, statt α_5 genommen werden muß, hängt davon ab, ob die erstere der Gleichungen A. für $P_5 \cdot \cos\alpha_5$ etwas positives oder etwas negatives giebt, also ob $-(5+\cos 50^0)$ positiv oder negativ ist. — Dasmal ist dieser Ausdruck negativ, also ist α_5 stumpf zu nehmen. Hat man aber nach dieser zweiten Methode α_5 gefunden, so hat P_5 entweder die Lage OE oder die Lage OF (Fig. 2.), je nachdem β_5 stumpf oder spitz sich ausrechnet. Dies hängt aber von der zweiten der Gleichungen A. ab, je nachdem solche $P_5 \cdot \cos\beta_5$ negativ oder positiv giebt, also je nachdem $-4+13 \cdot \cos 50^0$ positiv oder negativ sich ausrechnet; z. B. da dieser letztere Ausdruck positiv, also $\cos\beta_5$ negativ wird, so ist β_5 stumpf, und deshalb ist OF nicht die richtige Lage von P_5. Ist aber α_5 nach dieser zweiten Methode gefunden und ausgerechnet, und die genaue Lage von P_5 noch überdieß dadurch bestimmt, daß man untersucht hat, ob β_5 spitz oder stumpf wird, so findet sich dann aus der ersten der Gleichungen A. sogleich

$$P_5 = -\frac{5+\cos 50^0}{\cos\alpha_5};$$

welcher Ausdruck für P_5 immer etwas positives giebt, wie dies seyn muß. Man findet aber

$$P_5 = 8{,}206; \quad \alpha_5 = 133^0\ 26\tfrac{1}{2}' \text{ und } \beta_5 = 136^0\ 33\tfrac{1}{2}'.$$

Beispiel 2. Es werde die Kraft P_0 ihrer Größe und Richtung nach gesucht, welche die mittlere Kraft ist aus den im Beispiel 1. gegebenen 4 Kräften.

Man findet aus §. 4. Nr. 2.

$$\left.\begin{aligned} 5+\cos 50^0 &= P_0 \cdot \cos\alpha_0 \\ 13 \cdot \cos 40^0 - 4 &= P_0 \cdot \cos\beta_0 \end{aligned}\right\} \cdots (B).$$

Quadrirt und addirt man diese beiden Gleichungen, so ergiebt sich

$$P_0 = +\sqrt{(5+\cos 50^0)^2 + (13 \cdot \cos 40^0 - 4)^2};$$

ist aber hieraus P_0 gefunden, so findet sich noch

$$\cos\alpha_0 = \frac{5+\cos 50^0}{P_0} \text{ und } \cos\beta_0 = \frac{13 \cdot \cos 40^0 - 4}{P_0},$$

also daß wird

$$P_0 = 8{,}206; \quad \alpha_0 = 46^0\ 33\tfrac{1}{2}' \text{ und } \beta_0 = 43^0\ 26\tfrac{1}{2}'.$$

Es ist also die jetzt gesuchte Kraft P_0 der im vorhergehenden Beispiele gefundenen Kraft P_5 gleich und entgegen, wie solches vorauszusehen war.

Hätte man die Gleichungen B. durch einander dividirt, so hätte man erhalten

$$\frac{-4+13 \cdot \cos 40^0}{5+\cos 50^0} = \pm tg\,\alpha_0.$$

Ist aber die Lage von P_0 gefunden, so findet sich aus der ersteren der Gleichungen B. sogleich noch

$$P_0 = \frac{5 + \cos 50^0}{\cos \alpha_0}$$

dazu. Und so finden sich P_0 und α_0 und β_0 durch diese letztere bequemere Rechnung genau so groß wie vorher.

§. 5.

Das Kräften-Parallelogramm.

Obgleich in dem Vorstehenden die ganze Statik des Atoms, in so fern er gleichzeitig von Kräften angegriffen wird, deren Richtungen alle in einer und derselben Ebene liegen, abgehandelt sich findet, so ist es doch für die Bequemlichkeit der Anwendungen nicht unnütz, wenn man die Aufgabe besonders behandelt, wo statt n gegebener Kräfte nur zwei gegebene Kräfte P_1 und P_2 in eine mittlere Kraft P_0 zusammengesetzt werden sollen. — Führt man nämlich für diesen besonderen Fall die Rechnung des §. 4. Nr. 2. aus, wobei man die Axe OX mit der Richtung von P_1 zusammenfallen lassen kann, so daß $\alpha_1 = 0$ und $\beta_1 = 90^0$, also

$$X = P_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2 \quad \text{und} \quad Y = P_2 \cdot \cos \beta_2$$

wird, so findet sich

$$P_0 = \sqrt{(P_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2)^2 + (P_2 \cdot \cos \beta_2)^2} = \sqrt{P_1^2 + 2P_1 \cdot P_2 \cdot \cos \alpha_2 + P_2^2}$$

und $$\cos \alpha_0 = \frac{P_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2}{P_0}, \qquad \cos \beta_0 = \frac{P_2 \cdot \cos \beta_2}{P_2}$$

und dies giebt folgendes Resultat (Vgl. Lehrb. d. Mechan. Th. I. §. 13.):

„Wenn zwei Kräfte $P_1 = OA$ und $P_2 = OB$, deren Richtungen unter sich einen beliebigen Winkel $AOB = \varphi$ machen (Fig. 3.), einen Atom O gleichzeitig angreifen, so ist die (mittlere) Kraft P_0, welche dasselbe leistet, als diese (Seiten-) Kräfte P_1 und P_2, allemal der Größe und der Richtung nach durch die Diagonale OD des durch OA, OB und φ gegebenen Parallelogramms AOBD ausgedrückt." — Dieses Resultat heißt der „Satz des Kräften-Parallelogramms."

§. 6.

Hieraus folgt sogleich:

1) Jede Kraft $P_0 = OD$ kann auf unzählig viele Arten in zwei Seiten-Kräfte P_1 und P_2 zerlegt werden, indem man die Richtungen dieser letzteren ganz beliebig annehmen kann, dann durch D mit diesen Richtungen die Parallelen DA und DB legt, und $OA = P_1$, so wie $OB = P_2$ als Seiten-Kräfte nimmt.

2) Ist $OD = P_0$ die gegebene Kraft, so sind in dem Dreieck DOA, wie man solches auch construiren möge, die Seiten OA und AD allemal die beiden Seiten-Kräfte P_1 und P_2, in welche P_0 zerlegt werden kann; die Richtung von $AD = P_2$ muß aber durch O mit der Seite AD parallel gelegt werden.

3) Denkt man sich $OC = P_3$ der $P_0 = OD$ gleich und entgegen, so halten sich die drei Kräfte P_1, P_2 und P_3, wenn sie den Atom O gleichzeitig angreifen, im Gleichgewicht. Diese 3 Kräfte im Gleichgewicht sind nun bezüglich durch die 3 Seiten OA, AD und OD des Dreiecks OAD ihrer Größe nach vorgestellt. Da sich aber im Dreieck die Seiten wie die Sinus der Gegenwinkel verhalten, so ist im Gleichgewicht allemal

$$P_1 : \sin BOC = P_2 : \sin AOC = P_3 : \sin AOB,$$

d. h. „eine jede der drei im Gleichgewicht sich befindenden Kräfte „hat zu dem Sinus des von den beiden anderen gebildeten Winkels ein konstantes Verhältniß;" und diese zwei Gleichungen ersetzen die Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts des §. 4. Nr. 1., so daß diese Proportionen zum Gleichgewicht der drei Kräfte nothwendig, aber auch ausreichend sind.

4) Mittelst des Kräften-Parallelogramms kann man auch beliebig viel in einer und derselben Ebene liegender Kräfte, z. B. $P_1 = OA_1$, $P_2 = OA_2$, $P_3 = OA_3$, $P_4 = OA_4$ und $P_5 = OA_5$ (Fig. 5.), ohne alle Rechnung, durch bloße geometrische Konstruktion, in eine einzige (mittlere) Kraft P_0 vereinigen.

B. Betrachtung von Kräften, welche einen Atom gleichzeitig angreifen, und deren Richtungen nicht alle in einer und derselben Ebene liegen, sondern ganz beliebig sind.

§. 7.

1) Die Richtung einer Kraft $P=OM$ (Fig. 4.) im Raume giebt man dadurch, daß man durch den angegriffenen Atom O drei auf einander senkrechte (Koordinaten-) Axen OX, OY, OZ legt, und nun die spitzen oder stumpfen Winkel $MOX=\alpha$, $MOY=\beta$, $MOZ=\gamma$ angiebt oder bestimmt, welche die Richtung von P mit diesen 3 Axen macht.

2) Legt man durch M drei Ebenen, nämlich MM_2M_3 mit XOY, MM_1M_3 mit XOZ, und MM_1M_2 mit YOZ parallel, so erhält man ein rechtwinkliges Parallelepipedum, dessen drei Dimensionen bezüglich durch X, Y und Z bezeichnet seyn mögen, so daß man hat

$$OA = BM_1 = CM_2 = MM_3 = X,$$
$$OB = AM_1 = CM_3 = MM_2 = Y,$$
und
$$OC = AM_2 = BM_3 = MM_1 = Z.$$

3) In diesem Parallelepipedum steht jede der drei Axen OX, OY, OZ auf einem der drei Paare einander gegenüber liegender und paralleler Ebenen, und daher auf allen in diesen Ebenen liegenden Graden, welche sie trifft, senkrecht. Darum sind die Winkel MAO, MBO, MCO rechte Winkel, und darum hat man noch die Gleichungen

$$OM\cdot\cos\alpha=OA,\quad OM\cdot\cos\beta=OB \text{ und } OM\cdot\cos\gamma=OC,$$

d. h. wenn OM durch P bezeichnet wird,

$$\text{I. } P\cdot\cos\alpha=X,\quad \text{II. } P\cdot\cos\beta=Y,\quad \text{III. } P\cdot\cos\gamma=Z.$$

4) Stellt aber P irgend eine Kraft vor, so sind X, Y, Z drei Seiten-Kräfte, deren gemeinschaftlicher Angriff auf O dasselbe leistet als P. Und umgekehrt: Sind X, Y, Z drei den Atom O gleichzeitig angreifende Kräfte, deren Richtungen mit den Axen OX, OY, OZ zusammenfallen, so ist P die mittlere Kraft, die dasselbe leistet.

Denn es zerlegt sich $P=OM$ zunächst in die beiden Seiten-Kräfte

$OC = Z$ und OM_1, während sich letztere Kraft OM_1 wieder in $OB = Y$ und $OA = X$ zerlegt.

5) Weil aber $OM_1^2 = X^2 + Y^2$ und $OM_1^2 + OC^2 = P^2$ ist, so hat man noch

$$\text{IV.} \qquad P = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Quadrirt und addirt man die Gleichungen I. — III. und substituirt man in der entstehenden Gleichung rechts statt $X^2 + Y^2 + Z^2$ das (nach IV.) eben so große P^2, so erhält man noch

$$\text{V.} \qquad (\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1.$$

6) Endlich gelten die 3 Gleichungen I. — III. und die IV. und V. auch dann noch, wenn einer oder zwei der 3 Winkel α, β, γ, oder alle drei zugleich stumpf sein sollten, sobald man nur, im Falle X oder Y oder Z aus den Gleichungen I. — III. negativ hervorgehen sollte, dies als ein Zeichen ansieht, daß dasmal die Richtung dieser Seiten-Kraft nicht die der Axe selbst, sondern ihre genau entgegengesetzte ist.

Daß α, oder β, oder γ, auch ein rechter Winkel oder 0 oder 180^0 seyn kann, versteht sich von selbst.

7) Jede Kraft P wird aber, so wie früher, immer absolut, d. h. nie negativ in Rechnung gebracht.

§. 8.

Hat man n Kräfte P_1, P_2, P_3, $\cdots P_n$, welche den Atom O gleichzeitig angreifen, und welche mit den Axen OX, OY, OZ bezüglich die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$; $\cdots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, machen, so

1) halten sich diese Kräfte im Gleichgewicht, so oft

$$\text{I.} \quad P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + P_3 \cdot \cos\alpha_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\alpha_n = 0$$

oder $$\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0,$$

$$\text{II.} \quad P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2 + P_3 \cdot \cos\beta_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\beta_n = 0$$

oder $$\Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0,$$

$$\text{III.} \quad P_1 \cdot \cos\gamma_1 + P_2 \cdot \cos\gamma_2 + P_3 \cdot \cos\gamma_3 + \cdots + P_n \cdot \cos\gamma_n = 0$$

oder $$\Sigma(P \cdot eos\gamma) = 0$$

ist; und diese 3 Gleichungen sind zum Gleichgewicht nothwendig und ausreichend *).

Die Kräfte halten sich also im Gleichgewicht, so oft die Summe ihrer Projektionen (wenn nämlich die Kräfte ihrer Größe und Richtung nach durch gerade Linien vorgestellt sind) auf jede der 3 Axen OX, OY, OZ der Null gleich ist, vorausgesetzt, daß man diejenigen Projektionen als negativ in Rechnung bringt, die nicht in die Richtung der Axe selbst, sondern in ihre Verlängerung (nach der entgegengesetzten Richtung zu) fallen.

Und da die Axen OX, OY, OZ beliebig gelegt werden können, wenn nur auf einander senkrecht, so erhält man eine beliebige Anzahl solcher Gleichungen des Gleichgewichts, von denen jedoch drei beliebige (auf 3 Axen OX, OX′, OX″ bezogen, welche unter sich ganz beliebige Winkel machen) zum Gleichgewicht nicht bloß nothwendig sind, sondern auch ausreichen; wie letzteres auch noch eine einfache trigonometrische Rechnung lehrt (S. Lehrbuch d. Mechan. Th. I. §. 25.).

2) Halten sich aber die Kräfte P_1, P_2, $P_3 \cdots P_n$ nicht im Gleichgewicht, d. h. ist keine, oder nur eine, oder sind nur zwei, aber nicht alle drei Gleichungen I.—III. der Nr. 1. erfüllt, so findet man die einzige mittlere Kraft P_0, welche statt aller den Atom O gleichzeitig angreifenden Kräfte $P_1, P_2, \cdots P_n$ gesetzt werden kann, ihrer Größe und ihrer Richtung nach (also die Winkel α_0, β_0, γ_0, welche ihre Richtung mit den drei Axen OX, OY, OZ macht) durch nachstehende Rechnung: Man berechnet zuerst X, Y, Z aus folgenden Gleichungen:

a) $\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = X;$

b) $\Sigma(P \cdot \cos\beta) = Y;$

c) $\Sigma(P \cdot \cos\gamma) = Z.$

Hernach findet man P_0 und $\cos\alpha_0$, $\cos\beta_0$, $\cos\gamma_0$ aus diesen Gleichungen:

I. $P_0 \cdot \cos\alpha_0 = X;$ II. $P_0 \cdot \cos\beta_0 = Y;$ III. $P_0 \cdot \cos\gamma_0 = Z;$

welche Gleichungen quadrirt und addirt, wegen

$$\cos\alpha_0{}^2 + \cos\beta_0{}^2 + \cos\gamma_0{}^2 = 1,$$

---

*) Hat man nur 3 Kräfte P_1, P_2 und P_3, so können sich diese (nach §§. 5. 6.) nicht im Gleichgewicht halten, wenn sie nicht alle drei in einer und derselben Ebene liegen. Nimmt man dann OX, OY in derselben Ebene, so wird $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 90^0$ und die dritte Gleichung ist dann allemal von selber erfüllt.

sogleich

IV. $$P_0 = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

liefern.

Aus dieser letztern Gleichung (IV.) wird also zuerst P_0 berechnet, und dann findet man aus I. — III. noch

$$\cos\alpha_0 = \frac{X}{P_0}; \quad \cos\beta_0 = \frac{Y}{P_0} \quad \text{und} \quad \cos\gamma_0 = \frac{Z}{P_0}$$

dazu, so daß α_0 spitz oder stumpf oder recht wird, je nachdem X positiv, negativ oder Null sich ausgerechnet hat. Eben so wird $\cos\beta_0$ mit Y zugleich positiv, negativ oder Null seyn; und gerade dasselbe gilt von $\cos\gamma_0$ und Z.

Der Grund dieser Behauptungen liegt bereits im §. 3. aus einander gesetzt, nur daß hier jede Kraft, z. B. P_3, in drei Seiten-Kräfte $P_3 \cdot \cos\alpha_3$, $P_3 \cdot \cos\beta_3$ und $P_3 \cdot \cos\gamma_3$ zerlegt werden muß (nach den 3 Axen OX, OY und OZ). — Das Ganze ist endlich analog dem im §. 4. Gesagten.

Zweites Kapitel.

Von parallelen Kräften, die einen festen Körper gleichzeitig angreifen.

§. 9.

1) Wenn mehrere Kräfte verschiedene Atome angreifen, letztere aber vermöge der Kräfte nicht aus ihrer gegenseitigen Lage gebracht werden, so sagt man, diese Atome bilden ein festes System oder einen festen Körper.

2) Als Princip wird festgesetzt, daß wenn eine Kraft einen festen Körper angreift, man zum Angriffs-Punkt jeden Punkt nehmen könne, welcher in der Richtung der Kraft liegt, wenn solcher nur mit dem festen Körper fest gedacht wird.

3) Zwei parallel wirkende Kräfte liegen mit ihren Richtungen immer in einer und derselben Ebene. — Dasselbe kann nicht

mehr

mehr nothwendig von drei oder mehr parallelen Kräften gesagt werden, welche einen festen Körper angreifen.

§. 10.

1) Greifen zwei parallele Kräfte P_1 und P_2 einen festen Körper an, und sind sie dabei einander gleich, aber im entgegengesetzten Sinne wirkend, so lassen sie sich nie in eine einzige Kraft vereinigen.

2) Befinden sich aber die parallelen Kräfte nicht in diesem einzigen Ausnahmsfall, so läßt sich immer eine einzige sogenannte mittlere Kraft P_0 finden, welche dasselbe leistet als die beiden gegebenen Kräfte P_1 und P_2 leisten würden, wenn sie gleichzeitig angriffen; und zwar ist diese mittlere Kraft P_0

a) der Richtung nach parallel mit P_1 und P_2 und im Sinne der größeren von letzteren beiden wirkend.

b) Der Größe nach ist

I. $$P_0 = P_1 + P_2,$$

wenn man nur statt P_2 eine negative Zahl setzt, so oft P_2 mit P_1 im entgegengesetzten Sinne wirkt, und wenn man nur, im Falle diese Gleichung eine negative Zahl für P_0 liefern sollte, dies als ein Zeichen ansieht, daß die wirkliche absolute Kraft P_0 ebenfalls im entgegengesetzten Sinne von P_1 wirkt; endlich wird

c) der Angriffs-Punkt A_0 der mittlern Kraft P_0, wenn A_1 und A_2 (Figg. 5. und 6.) die Angriffs-Punkte der Seiten-Kräfte P_1 und P_2 sind, auf folgende Weise gefunden. Man zieht die Gerade A_1A_2; man findet auf selbiger einen Punkt A_0 so, daß

II. $$P_1 \times A_1A_0 = P_2 \times A_2A_0, \text{ oder } P_1 : P_2 = A_2A_0 : A_1A_0,$$

oder $$P_1 + P_2 : P_2 = A_1A_2 : A_1A_0$$

ist, und A_0 ist dann der Angriffs-Punkt von P_0 (oder, nach §. 9. Nr. 2., jeder Punkt in der durch A_0 völlig bestimmten Richtung der Kraft P_0), wenn man nur, im Falle P_1 und P_2 im entgegengesetzten Sinne wirken (wie in Fig. 6.), den Punkt A_0 auf diejenige Seite legt, wo er der größern der beiden Kräfte P_1 und P_2 am nächsten liegt.

Um dies zu finden, denkt man sich an A_1 und A_2 noch zwei gleiche

Kräfte $Q_1 = Q_2$ angebracht (in der Geraden A_1A_2, aber einander genau entgegen), so daß sie sich vernichten und an der Wirkung der Kräfte P_1 und P_2 nichts ändern. Dann vereinigt man vermöge des Kräften-Parallelogramms die beiden Kräfte P_1 und Q_1 in die einzige R_1, desgleichen P_2 und Q_2 in R_2. Denkt man sich nun diese beiden Kräfte R_1 und R_2 (nach §. 9. Nr. 2.) in dem Punkte E angebracht, in welchem sich ihre Richtungen schneiden, und durch E die Geraden FEG und EH bezüglich mit A_1A_2 und mit P_1 oder P_2 parallel, so kann man R_1 in E wieder in Q_1 und P_1, die in den Richtungen EF und EH wirken, zerlegen, während R_2 in Q_2 und P_2 in den Richtungen EG und EH (oder EH′ im Falle der Fig. 6.), zerlegt werden kann. Dann vernichten sich Q_1 und Q_2 in E, und es bleibt P_1 und P_2 in der Richtung EH (oder im Falle der Fig. 6. letztere in der Richtung EH′), welche sich (nach §. 2. Nr. 1. und 2.) in $P_1 + P_2$ vereinigen, wodurch die Behauptungen a. und b. der Nr. 2. außer Zweifel gesetzt sind. — Weil aber die Dreiecke $A_1B_1D_1$ und A_1A_0E einander ähnlich sind, und eben so auch die Dreiecke $A_2B_2D_2$ und A_2A_0E, so hat man die beiden Proportionen

$$P_1 : Q_1 = EA_0 : A_1A_0 \quad \text{und} \quad P_2 : Q_2 = EA_0 : A_2A_0$$

während $Q_1 = Q_2$ ist. Eliminirt man nun diese Kraft $Q_1 = Q_2$ aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man die Gleichung II. der Nr. 2.

Ist aber im Falle der Fig. 6. $P_2 = P_1$, so wird auch R_2 der Kraft R_1 gleich und parallel; der Durchschnitts-Punkt E existirt nicht mehr, und daher wird auch jetzt nicht eine einzige mittlere Kraft gefunden: wohl aber existiren wieder zwei gleiche, parallele und entgegengesetzte Kräfte R_1 und R_2, die statt P_1 und P_2 gesetzt werden können, während R_1 und R_2 wieder mit den verschieden und beliebig angenommenen Werthen von $Q_1 = Q_2$ sich ändern *).

3) Die Gleichung Nr. 2. II., nämlich die Proportion

$$P_1 : P_2 = A_0A_2 : A_0A_1$$

kann auf unendlich viele Arten umgeformt werden.

Man denke sich eine beliebige Ebene und von A_1, A_0, A_2 aus senkrechte Linien auf diese Ebene gezogen, deren Längen bezüglich durch x_1, x_0, x_2 ausgedrückt seyn mögen (vgl. Fig. 7., wo $A_1K_1 = x_1$, $A_0K_0 = x_0$ und $A_2K_2 = x_2$ zu sehen ist, während A_2M, A_0N mit K_1K_2 d. h. mit der gedachten Ebene selbst, parallel gezogen sind). Dann kann man statt des Verhältnisses der Hypothenusen A_0A_2 und A_0A_1 das ihm gleiche Verhältniß der Katheten A_0L und A_1N setzen, während $A_0L = x_0 - x_2$ und $A_1N = x_1 - x_0$ ist. Die obige Gleichung oder Proportion geht dann über in diese

$$P_1 : P_2 = x_0 - x_2 : x_1 - x_0 \quad \text{oder} \quad (P_1 + P_2) \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2.$$

---

*) Von diesem Falle, wo zwei gleiche parallele und entgegengesetzt wirkende Kräfte einen festen Körper angreifen, wird weiter unten (§. 22. und §. 44.) unter dem Titel: „Theorie der Gegenpaare" noch mehr gelehrt werden.

4) Denkt man sich daher drei Koordinaten-Ebenen, die sich in den drei auf einander senkrechten Koordinaten-Axen OX, OY, OZ (Fig. 4.) schneiden, und sind die Koordinaten-Werthe der Punkte A_1, A_2 und A_0 bezüglich durch x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 und x_0, y_0, z_0 vorgestellt, so geht die Gleichung

$$P_1 : P_2 = A_2A_0 : A_1A_0,$$

weil $$P_0 = P_1 + P_2 \quad \cdots \text{ I.}$$

ist (nach Nr. 3.), nach und nach über

$$\left.\begin{array}{ll} \text{in} & P_0 \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2, \\ \text{in} & P_0 \cdot y_0 = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 \\ \text{und in} & P_0 \cdot z_0 = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2; \end{array}\right\} \cdots \text{ II.}$$

so daß jede für sich statt findet, weil jede die obige II. der Nr. 2. repräsentirt. — Diese letzteren 3 Gleichungen geben aber alle drei Koordinaten-Werthe x_0, y_0, z_0 des Angriffs-Punktes A_0 der mittlern Kraft P_0, wenn man nur nicht unterläßt statt P_2 in diese 4 Gleichungen eine negative Zahl zu setzen, so oft die Kraft P_2 im entgegengesetzten Sinne der P_1 wirkt, statt P_0 aber den Werth zu setzen (mag er positiv oder negativ seyn), welchen die Gleichung I. liefert. Die x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_0, y_0, z_0 stellen positive oder negative Zahlen oder Null vor, je nachdem die zugehörigen Punkte auf der einen oder auf der andern Seite der bezüglichen Koordinaten-Ebene oder in letzterer selbst liegen.

§. 11.

Sind beliebig viel, z. B. n parallele Kräfte $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$, welche beliebig im Raume liegen, gegeben, so kann man nach den vorstehenden Formeln erst zwei derselben in eine einzige, dann diese mit der dritten wieder in eine einzige, diese letztere mit der vierten wieder vereinigen u. s. w., immer nach denselben Formeln, bis zuletzt n — 1 der Kräfte (d. h. alle bis auf eine) in eine einzige P' vereinigt sind. — Fällt dann diese einzige Kraft P' mit der letztern P_n in eine und dieselbe Gerade zusammen, ist dabei $P' = P_n$ und sind sie noch überdies einander genau entgegen, so halten sich alle gegebenen n Kräfte im Gleichgewicht. — Ist aber diese einzige Kraft P', der

letzten P_n parallel, gleich und dabei entgegengesetzt, so sind dann alle n Kräfte auf zwei gleiche parallele und entgegengesetzte Kräfte zurückgebracht, welche sich (nach §. 10. Nr. 1.) nicht in eine einzige vereinigen lassen. — Ist endlich die einzige Kraft P', der letztern P_n nicht entgegen, oder wenn entgegen, doch nicht gleich, so kann man allemal noch P' und P_n in eine einzige Kraft P_0 vereinigen, und diese letztere ist dann die (mittlere) Kraft, welche alle gegebenen (Seiten-) Kräfte $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$, wenn letztere den festen Körper gleichzeitig angreifend vorausgesetzt werden, ganz und vollkommen ersetzt.

1) Sind $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; \cdots x_n, y_n, z_n$ und x_0, y_0, z_0 bezüglich die Koordinaten-Werthe der Angriffs-Punkte $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$ und P_0, so erhält man die Größe der mittlern Kraft P_0 (welche immer mit den parallelen Kräften wiederum parallel wirkt) und die Koordinaten-Werthe x_0, y_0, z_0 ihres Angriffs-Punktes, aus folgenden 4 Gleichungen:

I. $P_0 = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots P_n$, oder $P_0 = \Sigma(P)$,

II. $\begin{cases} P_0 \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \cdots + P_n \cdot x_n, \text{ oder } P_0 \cdot x_0 = \Sigma(P \cdot x), \\ P_0 \cdot y_0 = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + \cdots + P_n \cdot y_n, \text{ oder } P_0 \cdot y_0 = \Sigma(P \cdot y), \\ P_0 \cdot z_0 = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 + \cdots + P_n \cdot z_n, \text{ oder } P_0 \cdot z_0 = \Sigma(P \cdot z), \end{cases}$

wenn nur statt derjenigen der Buchstaben $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$ negative Zahlen gesetzt werden, welche mit den (in der Rechnung) durch positive Zahlen vorgestellten Kräften im entgegengesetzten Sinne wirken, so daß, wenn P_0 aus I. selbst negativ hervorgehen sollte, solches andeuten würde, daß die wirkliche absolute Kraft P_0 in dem Sinne derer Kräfte wirke, die mit negativen Zahlen in die Rechnung gebracht worden sind.

2) Unter der Voraussetzung, daß OZ mit P_1, P_2, rc. parallel gedacht ist, sind für das Gleichgewicht der n parallelen Kräfte nothwendig und ausreichend die 3 Gleichungen

I. $P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = 0$, oder $\Sigma(P) = 0$,

II. $\begin{cases} P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \cdots + P_n \cdot x_n = 0, \text{ oder } \Sigma(P \cdot x) = 0, \\ P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + \cdots + P_n \cdot y_n = 0, \text{ oder } \Sigma(P \cdot y) = 0 \text{ *)}. \end{cases}$

---

*) Da man bei derselben Lage von OZ, doch noch OX und OY in

3) Ist zwar die vorstehende Gleichung I. (der Nr. 2.) erfüllt, finden aber nicht zugleich beide Gleichungen II. (der Nr. 2.) statt, so halten sich die Kräfte nicht im Gleichgewicht, während (nach Nr. 1.) nun auch keine mittlere Kraft P_0 existirt. Also reduciren sich jetzt alle n parallelen Kräfte auf zwei gleiche parallele aber entgegengesetzte (die weder im Gleichgewicht sich halten können, noch eine einzige mittlere Kraft P_0 haben).

Wirken alle Kräfte P_1, $P_2, \cdots P_n$ in einem und demselben Sinne (wie z. B. die Schwere der einzelnen Atome eines festen Körpers), so haben sie allemal eine einzige mittlere Kraft P_0, und es können daher dann die beiden letztern Fälle (Nrr. 2. und 3.) nie eintreten.

§. 12.

Haben n parallele Kräfte P_1, $P_2, \cdots P_n$ wirklich eine mittlere Kraft P_0 und ist nach §. 11. Nr. 1. der Angriffs-Punkt gefunden, so legt man durch ihn die Kraft P_0 parallel mit den parallelen Kräften, und dann kann man jeden andern Punkt in der Richtung dieser Kraft zum Angriffs-Punkt der P_0 nehmen (nach §. 9. Nr. 2.). Der durch die gefundenen Koordinaten-Werthe x_0, y_0, z_0 bestimmte Angriffs-Punkt hat aber vor allen andern Punkten, die in der Richtung der Kraft P_0 liegen, das voraus, daß er von der Lage der parallelen Kräfte $P_1, P_2, \cdots P_n$ gegen den angegriffenen festen Körper ganz unabhängig ist, und daher (wie die Ansicht der Formeln §. 11. Nr. 1. unmittelbar

---

der auf OZ, oder auf die Richtungen der Kräfte, senkrechten Ebene beliebig nehmen kann, so erhält man im Falle des Gleichgewichts unendlich viele solcher Paare von Gleichungen wie die II. — Es läßt sich aber leicht auf dem schon §. 4. Anmerkung 1. angedeuteten Wege beweisen, daß wenn von allen diesen Gleichungen irgend zwei erfüllt sind, dann die übrigen alle, weil sie als algebraische (trigonometrische) Folgerungen aus diesen beiden nachgewiesen werden, zugleich mit erfüllt sind, folglich auch die beiden Gleichungen II. Also ist dann, wenn auch noch die I. erfüllt ist, nothwendig Gleichgewicht.

Ist daher die I. erfüllt und finden auch noch die beiden Gleichungen

$$\Sigma(Px) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(Px') = 0$$

statt, wo x'_1, x'_2, $x'_3 \cdots$ sich auf irgend eine zweite Abscissen-Axe OX' beziehen, welche mit der OX einen beliebigen Winkel macht, so halten sich die Kräfte doch im Gleichgewicht.

sehen läßt) immer derselbe bleibt, wenn auch die parallelen Kräfte um ihre Angriffs-Punkte sich beliebig drehen, wenn sie nur immer dieselben Angriffs-Punkte und immer dieselbe Größe behalten und auch immer unter sich parallel bleiben.

Der durch die Formeln §. 11. Nr. 1. mittelst der Koordinaten-Werthe x_0, y_0, z_0 ausgedrückte Angriffs-Punkt der mittlern Kraft P_0, weil letztere immer durch ihn hindurchgeht, auch wenn sie mit den Kräften $P_1, P_2, P_3 \cdots P_n$ zugleich ihre Richtung gegen den Körper abändert, heißt deshalb der Central-Punkt der parallelen Kräfte, und häufiger noch der Schwerpunkt (in so ferne die Schwere der einzelnen Atome, oder auch die Gewichte einzelner Theile eines Körpers als eben so viele parallel wirkende Kräfte angesehen werden).

Die Producte in den Gleichungen §. 11. Nr. 1. II. werden dann auch Schwer-Punkts-Momente genannt.

Man bemerke auch sogleich noch:

1) Liegen die Angriffs-Punkte der parallelen Kräfte alle in einer und derselben Ebene (die man zur Ebene der OX und OY nehmen kann), so liegt der Schwer-Punkt selbst in derselben Ebene.

2) Liegen alle Angriffs-Punkte der parallelen Kräfte in einer und derselben Geraden (die man zur Axe OX nehmen kann), so findet sich der Schwer-Punkt in derselben Geraden.

Die 3te oder die 2te und 3te der Gleichungen II. des §. 11. Nr. 1. geben diese Resultate.

Anmerkung. Da die Schwer-Punkte der Körper oder einzelner Theile derselben in den Anwendungen eine wichtige Rolle spielen, in so fern das Gesammtgewicht im Schwer-Punkt angebracht und dann jeder einzelne Atom als nicht schwer angesehen werden kann, so mag das nun folgende Kapitel noch die wichtigsten der Ausführungen enthalten, welche der Satz §. 11. Nr. 1. zuläßt.

Drittes Kapitel.

Praktische Auffindung der Schwer-Punkte.

A. Für den Elementar-Unterricht.

§. 13.

Wenn von der Auffindung des Schwer-Punktes einer homogenen begrenzten Linie, oder Fläche, oder eines homogenen Körpers die Rede ist, so versteht man darunter: „Auf unendlich „kleine und gleiche Theile der Linie, der Fläche oder des Kör„pers, wirken (unendlich kleine und) gleiche Gewichte, so daß „also diese Gewichte mit den Räumen selbst, auf welche „sie wirken, proportional sind; — den Punkt zu finden „(nach §. 11. Nr. 1.), durch welchen das Gesammt-Gewicht „(als mittlere Kraft) immer hindurchgeht, welche Lage die Linie, „die Fläche oder der Körper, deren oder dessen Schwer-Punkt ge„funden werden soll, auch immer gegen die Richtung der Schwere „(d. h. gegen eine Vertikal-Linie) annehmen mag."

Das Gewicht, welches auf die einzelnen Theile der gedachten Räume wirkt, ist in der Regel das Gewicht der Materie selbst, welche diese Räume erfüllt. — Die Formeln des §. 11. Nr. 1. lassen aber sehen, daß der Schwer-Punkt derselbe bleibt, auch wenn statt der einzelnen Gewichte $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$ ihre mfachen $mP_1, mP_2, mP_3, \cdots mP_n$ gesetzt werden. Also kann man sich auch bei der Auffindung der Schwer-Punkte der homogenen Linien, Flächen und Körper, in den einzelnen unendlich kleinen aber gleichen Theilen, außer dem durchweg gleich gedachten Gewicht der Materie selbst, noch besondere (unendlich kleine und) gleiche Gewichte hinzugefügt denken, ohne daß der Schwer-Punkt selbst dadurch verrückt wird.

Eben deshalb kann man in diesen Berechnungen des Schwer-Punktes, statt der Gewichte, die Räume, auf welche sie wirken, selbst in Rechnung bringen.

§. 14.

Der Schwer-Punkt einer homogenen begrenzten Geraden liegt offenbar in ihrer Mitte.

Der Schwer-Punkt einer begrenzten krummen Linie fällt in der Regel außerhalb derselben.

2) Der Schwer-Punkt eines homogenen Dreiecks ABC (Fig. 8.) wird gefunden, wenn man eine der 3 Seiten, z. B. AB in D halbirt, dann die CD zieht und $CF = \frac{2}{3}$ CD, oder $DF = \frac{1}{3}$ CD nimmt; oder auch dadurch, daß man zwei Seiten AB und BC in D und E halbirt, und den Durchschnitts-Punkt F der beiden geraden Verbindungs-Linien CD und AE, zum Schwer-Punkt nimmt.

Denn es ist einerlei, ob alle Atome schwer sind, oder ob die Gewichte aller der mit AB parallelen unendlich schmalen Streifen in ihrer Mitte angebracht gedacht werden (Nr. 1.).

3) Der Schwer-Punkt eines ebenen homogenen Vierecks ABCD (Fig. 9.) wird gefunden, wenn man selbiges in zwei Dreiecke ABC und ADC zerlegt, die Schwer-Punkte F_1 und F_2 dieser Dreiecke findet, sich in F_1 das Gewicht P_1 des Dreiecks ABC, in F_2 aber das Gewicht P_2 des Dreiecks ADC wirkend denkt, und nun (nach §. 10. Nr. 2. oder Nr. 4.) den Punkt F_0 sucht, an welchem die mittlere Kraft P_0 ($= P_1 + P_2$) angreifen muß, wenn sie dasselbe leisten soll, als P_1 und P_2.

Geschieht die Auffindung des Punktes F_0 nach §. 10. Nr. 2., so muß man F_1F_2 ziehen, und in dieser Linie zwischen F_1 und F_2 den Punkt F_0 so nehmen, daß $P_1 \times F_1F_0 = P_2 \times F_2F_0$ oder $P_1 + P_2 : P_2 = F_1F_2 : F_1F_0$ wird. — Geschieht aber die Auffindung von F_0 aus den bekannten F_1 und F_2 mittelst §. 10. Nr. 4. oder §. 11. Nr. 1., so kann man die F_1F_2 mit OX zusammenfallen lassen, und den Punkt O in F_1 selbst annehmen. Dann ist $x_1 = 0$, $x_2 = F_1F_2$ und $x_0 = F_1F_0$ und man hat, wenn P_0 das Gewicht des Vierecks vorstellt,

$$P_0 \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 \quad \text{d. h.} \quad P_0 \cdot F_1F_0 = P_2 \cdot F_1F_2$$

genau so wie kurz vorher auch; während $P_1 = \triangle ABC$, $P_2 = \triangle ADC$ und $P_0 = \square ABCD$ ist *).

Sollte aber der Fall der Fig. 10. eintreten, wo das Viereck einen einwärtsgehenden Winkel ADC hat, und absichtlich die Diagonale AC gezogen ist, welche das Viereck ABCD nicht als

*) Statt der Gewichte werden in diesen Schwer-Punkts-Rechnungen, so lange die Räume mit schwerer Materie homogen ausgefüllt gedacht werden, immer die Räume selbst gesetzt, auf welche sie wirken.

die Summe, sondern als die Differenz der beiden Dreiecke ABC und ADC erkennen läßt, so daß dasmal

$$\Delta\ ABC = \Delta\ ADC + \square\ ABCD$$

wird, so hat man jetzt zuerst den Schwer-Punkt G_0 des Ganzen [d. h. des Δ ABC $= P_0$] und den Schwer-Punkt G_1 des einen Theils [d. h. des Δ ADC $= P_1$], und sucht nun den Schwer-Punkt des andern Theils [d. h. des Vierecks ABCD $= P_2$]. Führt man nun Koordinaten-Axen OX und OY beliebig ein, und sind x_0, y_0; x_1, y_1 und x_2, y_2 bezüglich die Koordinaten-Werthe der Schwer-Punkte G_0, G_1 und G_2, so hat man (nach §. 11. Nr. 1. und §. 12. Nr. 1.)

$$P_0 \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 \quad \text{und} \quad P_0 \cdot y_0 = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2;$$

aber dasmal sind nicht x_0 und y_0, sondern x_2 und y_2 die Unbekannten, welche aus diesen Gleichungen gefunden werden müssen und können. — Läßt man übrigens OX mit G_1G_0 und O mit G_1 zusammenfallen, so ist $x_0 = G_1G_0$, $x_1 = 0$ und $x_2 = G_1G_2$, und es geht daher die Gleichung $P_0 \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2$, wenn man statt P_0, P_1, P_2 die Flächen selbst setzt, über in

$$\Delta\ ABC \times G_1G_0 = \square\ ABCD \times G_1G_2,$$

so daß dann die Lage von G_2 in der Geraden G_1G_0 sogleich bestimmt ist.

Uebrigens kann man in beiden Fällen (der Figur 9. oder 10.) auch beide Diagonalen ziehen, außer den Schwer-Punkten der Dreiecke ABC und ADC, auch noch die Schwer-Punkte der Dreiecke ABD und BCD finden und sowohl erstere beiden durch eine Gerade, als auch letztere beiden durch eine Gerade verbinden, und den Durchschnitts-Punkt dieser beiden Geraden zum Schwer-Punkt des Vierecks nehmen.

4) Soll der Schwer-Punkt einer beliebigen geradlinigen Figur gefunden werden, so zerlege man sie in Dreiecke, bestimme die Schwer-Punkte der einzelnen Dreiecke, denke sich die Gewichte P_1, P_2, $P_3 \cdots$ der einzelnen Dreiecke in diesen Schwer-Punkten angebracht, und suche nach §. 11. Nr. 1. (indem man die Ebene der Figur zur XOY nimmt, so daß z_1, z_2, $z_3 \cdots$ alle, also auch z_0 der Null gleich werden) x_0 und y_0, d. h. die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punkts der ganzen Figur, während

in den Rechnungen selbst immer statt der Gewichte der Figuren, ihre bloßen Inhalte gesetzt werden können.

Und da man jede krummlinige ebene Figur näherungsweise durch eine geradlinige ersetzen kann, so läßt sich dies Verfahren auch auf eine krummlinige Figur (näherungsweise) ausdehnen.

5) Der Schwer-Punkt des **Umfangs** einer geradlinigen Figur (des ganzen oder eines Theils desselben), also irgend einer gebrochenen Linie wird gefunden, wenn man sich die Gewichte $P_1, P_2, P_3, \cdots$ der einzelnen Seiten in ihrer Mitte wirksam denkt und nun nach §. 11. Nr. 1. die Koordinaten-Werthe x_0, y_0 aus den bekannten Koordinaten-Werthen x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; rc. der Halbirungs-Punkte der Seiten, berechnet.

Für den Umfang des Dreiecks ABC Fig. 8., wo $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, und die zur Grundlinie C gehörige Höhe $= h$ ist, findet sich der Abstand y_0 des Schwer-Punktes von $AB = c$, aus der Gleichung

$$y_0 = \tfrac{1}{2}h \cdot \frac{a+b}{a+b+c} = \frac{(a+b)\Delta}{c(a+b+c)},$$

wenn Δ den Inhalt des Dreiecks vorstellt.

6) Wird der Schwer-Punkt des Theils MNRSTUV (Fig. 11.) des Umfanges eines **regulären** Vielecks gesucht, so lassen sich die Rechnungen noch abkürzen.

Ist nämlich selbiger Theil in S halbirt, so liegt der gesuchte Schwer-Punkt offenbar in OSX, wenn O der Mittelpunkt des regulären Vielecks ist. Ist nun A_2 die Mitte einer Seite $NR = P_2$ und wird A_2B_2 senkrecht auf die Axe OSX gezogen, so ist

$$x_2 = OB_2 \quad \text{und} \quad P_2 \cdot x_2 = NR \cdot OB_2.$$

Sind nun noch NH und RH mit MV und OX parallel, so ist $\Delta NHR \sim \Delta OB_2A_2$, also $NR : NH = OA_2 : OB_2$, d. h. $NR \times OB_2 = NH \times OA_2$. — Folglich ist auch

$$P_2 \cdot x_2 = NH \cdot OA_2 = NH \times \varrho,$$

wenn die Höhe $OA_2 = \varrho$ gesetzt wird. — Und da für jede Seite das Analoge gilt, so findet sich, weil $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \text{rc.} = \varrho$ ist,

$$P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \cdots = (MG + NH + \cdots) \cdot \varrho$$

$$\text{d. h.} \quad P_0 \cdot x_0 = MV \times \varrho \quad \text{d. h.} \quad x_0 = \frac{MV \times \varrho}{MNRSTUV},$$

wo MV die durch die End-Punkte M und V gehende Sehne des umschriebenen Kreises, ϱ der Abstand des Mittel-Punktes O von einer der Seiten

des regulären Vielecks, und MNRSTUV die Länge des Umfangs selbst vorstellt, dessen Schwer-Punkt gefunden werden soll.

Dies gilt, das Vieleck mag noch so viele Seiten haben.

7) Daraus folgt, daß wenn der Schwer-Punkt des homogenen Kreisbogens MSV, der in dem Radius OS = r, welcher den Bogen in S halbirt, liegen muß, vom Mittel-Punkte O um x_0 absteht, dieser Abstand x_0 gefunden wird aus der Gleichung

$$x_0 = \frac{\text{Sehne MV} \times \text{Radius r}}{\text{Bog. MSV}},$$

oder $$\text{Bog. MSV} : \text{Sehne MV} = r : x_0.$$

8) Den Schwer-Punkt eines homogenen Kreis-Sektors OMSV (Fig. 12.) kann man auf folgende Art finden. Man beschreibt mit Om = $\frac{2}{3}$ OM einen zweiten Kreisbogen msv. Der (nach Nr. 7. zu findende) Schwer-Punkt dieses Kreisbogens msv ist zugleich der Schwer-Punkt des Sektors OMSV. Ist daher x_0 sein Abstand vom Mittel-Punkt O (in der Richtung OX, welche den Sektor halbirt), so findet sich

$$x_0 = \frac{\text{Sehne mv} \times \text{Om}}{\text{Bog. msv}} = \frac{2}{3}\,\frac{\text{Sehne MV} \times \text{OM}}{\text{Bog. MSV}}.$$

Denn man kann den Sektor OMSV durch unendlich viele Radien in unendlich viele unendlich schmale Sektorchen zerlegen, die als Dreieckchen angesehen werden können, deren Schwer-Punkte von O um $\frac{2}{3}$ des Radius OM abliegen (nach Nr. 2.). Man kann sich also das Gewicht aller dieser Sektorchen auf dem Bogen msv gleichmäßig vertheilt denken.

9) Soll der Schwer-Punkt des Segments MSV (Fig. 12.) gefunden werden, welcher in der dasselbe halbirenden Linie OX liegen muß, so bezeichnet man die Gewichte des Sektors OMSV, des Dreiecks OMV, und des Segments, bezüglich durch P_0, P_1 und P_2, so wie die Schwer-Punkts-Abstände dieser drei Flächen vom Mittel-Punkte O bezüglich durch x_0, x_1 und x_2; und man hat dann die Gleichung

$$P_0 \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2,$$

woraus, da x_0 in Nr. 8. gefunden ist, und da $x_1 = \frac{2}{3}$ OB ebenfalls bekannt ist, die unbekannte Entfernung x_2 augenblicklich berechnet werden kann.

§. 15.

1) Der Schwer-Punkt eines beliebigen homogenen Prisma oder eines beliebigen homogenen Cylinders (mit parallelen Grundflächen) liegt genau in der Mitte der Geraden, welche die Schwer-Punkte der beiden Grundflächen mit einander verbindet.

2) Der Schwer-Punkt der **Oberfläche** eines solchen Prisma oder Cylinders liegt dagegen in der Mitte der Geraden, welche die Schwer-Punkte der **Umfänge** der Grundflächen verbindet.

3) Der Schwer-Punkt einer jeden homogenen Pyramide und eines jeden homogenen Kegels wird gefunden, wenn man von dem Schwer-Punkt der Grundfläche aus nach der Spitze der Pyramide oder des Kegels eine Gerade sich denkt, und $\frac{1}{4}$ dieser Geraden von der Grundfläche, oder $\frac{3}{4}$ derselben von der Spitze auf ihr abschneidet.

Denn, Ebenen mit der Grundfläche parallel gelegt zerschneiden die Pyramide oder den Kegel in unendlich viele unendlich dünne Scheiben, welche alle ihre Schwer-Punkte in der gedachten Geraden haben. Also liegt der Schwer-Punkt des Ganzen in derselben Geraden. Bei der dreiseitigen Pyramide (Fig. 13.) liegt er in zweien solchen Geraden DF und AG, woraus folgt $DH = \frac{3}{4}DF$.

Die vielseitige Pyramide wird in dreiseitige zerlegt gedacht.

4) Der Schwer-Punkt einer homogenen pyramidalischen oder konischen Oberfläche (die Grundfläche nicht mit gerechnet) liegt in der Geraden, welche den Schwer-Punkt des Umfangs der Grundfläche mit der Spitze verbindet, und um $\frac{1}{3}$ derselben von der Grundfläche ab (aus §. 14. Nr. 2.).

5) Der Schwer-Punkt der krummen und homogenen Oberfläche eines Kugel-Abschnitts, d. h. der Kugel-Mütze (Calotte) MSV (Fig. 12.) liegt in der Mitte der Höhe BS derselben.

Legt man nämlich in gleichen aber unendlich kleinen Abständen von einander, Ebenen senkrecht auf BS, so zertheilen solche die Calotte in unendlich viele Zonen, die alle einander gleich sind (weil sie alle einer Cylinder-Zone des umschriebenen Cylinders von derselben Breite gleich sind). Da nun der Schwerpunkt eines jeden solchen unendlich schmalen Kreis-Streifens in der BS liegt, so ist die BS als mit den Gewichten dieser Streifen gleichmäßig belastet anzusehen; daher ist der Schwer-Punkt des Ganzen in der Mitte von BS.

6) Der Schwer-Punkt des homogenen Kugel-Ausschnitts

OMSV fällt genau mit dem Schwer-Punkt der Kugelmütze msv zusammen, wenn letztere mit der ersteren Kugel concentrisch, ihr Radius Om aber $\frac{3}{4}$ des Radius OM der erstern ist. Dieser Schwer-Punkt befindet sich also in der Mitte der Höhe bs dieser letztern Kugel-Mütze.

Denn man kann sich den Kugel-Ausschnitt durch Radien in unendlich viele, unendlich kleine und gleiche Pyramiden zerlegt denken, deren Schwer-Punkte alle sich in der Kugel-Mütze msv gleichmäßig vertheilen (vgl. §. 14. Nr. 8.).

Wird daher OS = R und OB = H gesetzt, so ist Os $= \frac{3}{4}$ R und Ob $= \frac{3}{4}$ H. Die Entfernung x_0 des Schwer-Punkts des Kugel-Ausschnitts OMSV ist daher ausgedrückt durch

$$x_0 = Ob + \tfrac{1}{2} bs = \tfrac{3}{4} H + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} (R - H) = \tfrac{3}{8} (R + H).$$

7) Daher steht der Schwer-Punkt der homogenen Ober-fläche der Halb-Kugel vom Mittel-Punkte um den halben Radius ab (nach Nr. 5.); während der Abstand des Schwer-Punkts der homogenen körperlichen Halb-Kugel vom Mittel-Punkte nur $\frac{3}{8}$ des Radius beträgt (nach Nr. 6. für $H = 0$).

8) Sind P_0, P_1, P_2 die Gewichte oder die Inhalte bezüglich des Kugel-Ausschnitts OMSV, des Kegels OMV und des Kugel-Abschnitts MSV, welche, wie hier immer, homogen vorausgesetzt werden, und sind x_0, x_1, x_2 bezüglich die Abstände ihrer Schwer-Punkte vom Mittel-Punkte O, so hat man nach §. 10. Nr. 4. oder §. 11. Nr. 1.

$$P_0 \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2;$$

so daß aus den bekannten Werthen von $x_0 = \frac{3}{8}(R + H)$ und (nach Nr. 3.) $x_1 = \frac{3}{4} H$ (wenn OS = R, OB = H ist) der Werth x_2, also der Schwer-Punkt des Kugel-Segments OMV ohne Weiteres gefunden werden kann. Man findet nämlich

$$x_2 = \frac{P_0 \cdot x_0 - P_1 \cdot x_1}{P_0 - P_1},$$

während $P_0 = \frac{1}{3} R \times$ Calotte MSV $= \frac{2}{3} R^2 (R - H) \pi$

und $P_1 = \frac{1}{3} H \times$ Kreis MV $= \frac{1}{3} H (R^2 - H^2) \pi$

ist, wenn P_0, P_1 die Inhalte vorstellen *).

---

*) Diese Inhalte mit dem Gewicht der Einheit, worauf sich die In-

§. 16.

1) Soll der Schwer-Punkt eines beliebigen homogenen Körpers P_0 gefunden werden, so zerlege man ihn in lauter Theile P_1, P_2, P_3, $\cdots P_n$, deren Schwer-Punkte nach dem Vorhergehenden gefunden werden können. Das Uebrige folgt dann aus §. 11. Nr. 1.

2) Man bedient sich aber derselben Formeln, wenn der Schwer-Punkt des Ganzen (P_0) und aller Theile (P_1, P_2, P_3, $\cdots P_{n-1}$) mit Ausnahme eines einzigen (P_n), bekannt sind, um daraus die Koordinaten-Werthe (x_n, y_n, z_n) des Schwer-Punkts dieses Theils (P_n) zu berechnen.

Ein hieher gehöriges Beispiel findet man in der Nr. 8. des §. 15. Ferner sind hieher gehörige Beispiele §. 14. Nr. 9. (und §. 14. Nr. 3., wo das Viereck mit dem einwärts gehenden Winkel betrachtet wird.)

Namentlich gehört hieher die Auffindung des Schwer-Punkts eines Hohl-Körpers, den man sich erst ausgefüllt, und dann als die Differenz des Ganzen und der Ausfüllung denkt.

B. Für den höheren Unterricht.

§. 17. Lehnsätze.

Wir setzen zunächst folgende Sätze als bekannt voraus:

1) Ist f_x eine beliebige Funktion von x, und bezeichnet f_{x+h} das, was aus f_x wird, wenn man $x+h$ statt x schreibt, so ist allemal

$$f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots;$$

und dieser Satz wird der Taylor'sche genannt; die Koeffizienten ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, etc. sind wiederum Funktionen von x, werden Differential-Koeffizienten genannt, und die Differentialrechnung giebt das (hier als bekannt vorausgesetzte) Rechnungs-Verfahren an, durch welches solche jedesmal, aus der gegebenen Funktion f_x und aus einander, gefunden und hergestellt werden.

---

halte beziehen, multiplicirt, geben auch, wenn man sie haben will, die wirklichen Gewichte.

2) Wächst also x um h, so wächst die Funktion f_x um

$$\partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{1\cdot 2} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots.$$

3) Wird der Zuwachs h unendlich klein gedacht, und durch dx bezeichnet, so ist auch der Zuwachs von f, den man dann allemal durch df *) zu bezeichnen pflegt, ebenfalls unendlich klein, und beide werden dann (nicht mehr Differenzen, sondern) Differentialien genannt. Die höheren Potenzen von h verschwinden dann gegen jede niedrigere, die in der Rechnung noch vorkommt; und das Resultat der No. 2. schreibt sich daher so

$$df = \partial f_x \cdot dx, \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dx} = \partial f_x.$$

Dieselbe Rechnung, welche aus f_x die andere Funktion ∂f_x zu finden lehrt, giebt uns also auch das Verhältniſs der unendlich kleinen zusammengehörigen Zuwachse (Differentialien) df und dx. — Dies ist der Grund warum jene Rechnung auch Differential-Rechnung genannt wird.

4) Unter $\int y_x \cdot dx$ oder $\int y \cdot dx$, versteht man diejenige Funktion f_x, deren Differenz df dem gegebenen $y_x \cdot dx$ wieder gleich ist, also daſs $df = y_x \cdot dx$, oder $df_x = y_x$ ist.

Die Integral-Rechnung (deren Regeln wir hier als bekannt voraussetzen) ist es, welche lehrt, aus jedem y_x diese Funktion f_x oder $\int y \cdot dx$ zu finden.

Man bezeichnet aber, wenn $\int y \cdot dx = \varphi_x$ gefunden ist, die Differenzen

$$\varphi_x - \varphi_a \quad \text{durch} \int_{x \div a} y \cdot dx \quad \text{oder} \int_a^x y \cdot dx,$$

$$\varphi_b - \varphi_a \quad \text{durch} \int_{b \div a} y \cdot dx \quad \text{oder} \int_a^b y \cdot dx.$$

*) Man unterscheide sorgfältig hier die (stehenden) d, von den (runden) ∂. Das letztere (∂) ist ein Operations-Zeichen, welches eine bestimmte Folge von Operationen anzeigt, durch welche ∂f_x aus f_x gebildet wird; das erstere (d) hat für sich gar keine Bedeutung, und mit x, f, in Verbindung (d. h. dx, df) stellt es unendlich kleine Zuwachse vor, welche x, f erleiden.

Da φ_a konstant ist, so hat die Differenz $\varphi_x - \varphi_a$ noch immer dieselbe Eigenschaft die auch φ_x hat, nämlich dafs

$$d(\varphi_x - \varphi_a) = d\varphi_x = y \cdot dx$$

ist; und es wird $\int_{x \div a} y \cdot dx$ oder $\varphi_x - \varphi_a$ „das mit $x = a$ anfangende Integral von y nach x" (oder von $y \cdot dx$) genannt. — Endlich heifst $\int_{b \div a} y \cdot dx$ oder $\varphi_b - \varphi_a$, welches nichts weiter als der Werth ist, den das mit $x = a$ anfangende Integral erhält, wenn der bestimmte Werth b statt x gesetzt wird, „das zwischen $x = a$ und $x = b$, „oder zwischen den Grenz-Werthen a und b von „x, genommene Integral.

Für alle Anwendungen der Integral-Rechnung, namentlich aber für die gegenwärtigen, ist der nachstehende Satz von besonderer, ganz ausnehmender Wichtigkeit, den man sich daher nicht fest genug einprägen kann, nämlich:

5) Soll die Summe von allen den unendlich vielen Produkten $y_x \cdot dx$ gefunden werden, welche denselben gemeinschaftlichen, konstanten und unendlich kleinen Faktor dx haben, deren erster Faktor aber nach und nach alle Werthe vorstellt, welche y_x annimmt, wenn man statt x nach und nach alle stetig neben einander liegenden (d. h. alle um das unendlich kleine dx von einander verschiedenen) Werthe setzt, von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin; — soll also die Summe

$$y_a \cdot dx + y_{a+dx} \cdot dx + y_{a+2dx} \cdot dx + \cdots + y_{b-dx} \cdot dx,$$

die aus unendlich vielen unendlich kleinen Summanden besteht, gefunden werden, — so darf man nur $\int_{b \div a} y_x \cdot dx$ berechnen und man wird diese Summe genau haben.

Vermöge dieses Satzes dient die Integral-Rechnung zur Summation von unendlich vielen unendlich kleinen Theilen; also z. B. zur Inhalts-Berechnung der Längen, Flächen und Körper, in so ferne sie in unendlich kleine Theile zerlegt werden, deren Inhalte sich finden lassen. — Vermöge dieses Satzes dient dieselbe Rechnung auch in den Formeln §. 11. No. 1. (für die Bestimmung des Schwer-Punktes) zur Summation, wenn die Anzahl der Glieder zur Rechten jener Gleichungen unend-

endlich grofs werden, jedes einzelne also unendlich klein seyn sollte. Das Folgende wird dies nun näher nachweisen.

§. 18.

Schwer-Punkt eines homogenen Bogens.

1) Es ist Fig. 14. *OAMS* eine durch die Gleichung $y = y_x$ (zwischen den Koordinaten-Werthen x und y) gegebene Kurve; *AB* ein Bogen derselben, dessen End-Punkte *A* und *B* gegeben sind durch deren Abscissen-Werthe $x = \alpha$ und $x = \beta$. — Dann wird der Schwer-Punkt dieses homogen gedachten Bogens gefunden aus den Gleichungen

$$I. \qquad P_0 = \int_{\beta \div \alpha} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx;$$

$$II. \quad \begin{cases} P_0 \cdot x_0 = \int_{\beta \div \alpha} x \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx, \\ P_0 \cdot y_0 = \int_{\beta \div \alpha} y \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx, \end{cases}$$

wo P_0 die Länge des Bogens *AMB* ausdrückt.

Denn man zerlegt den Bogen *AMB* in lauter unendlich viele unendlich kleine und gleiche Theile ds, so ist in den Formeln §. 11. No. 1.

$$P_1 = P_2 = P_3 = etc. = ds = \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx.$$

Das Uebrige folgt dann aus §. 17. No. 5.

Setzt man, wenn zu $x = 0$ auch $y = 0$ werden sollte, wie dies in der Figur 14. der Fall ist, $\alpha = 0$, so bekommt man den Schwer-Punkt des Bogens *OMB*.

2) Ist die Kurve eine doppelt gekrümmte und durch zwei Gleichungen zwischen 3 Koordinaten-Werthen x, y, z, die sich auf drei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen *OX*, *OY*, *OZ* beziehen, gegeben, so dafs $y = y_x$ und $z = z_x$ wird, so bleiben die letztern Betrachtungen noch gültig, nur dafs jezt

$$ds = \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2} \cdot dx$$

wird. — Es wird daher der Schwer-Punkt des doppelt gekrümmten Bogens *AMB* gefunden aus den Gleichungen

$$I. \quad P_0 = \int_{\beta \div \alpha} \sqrt{1 + \partial y_x^{\,2} + \partial z_x^{\,2}} \cdot dx;$$

$$II. \quad \begin{cases} P_0 \cdot x_0 = \int_{\beta \div \alpha} x \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^{\,2} + \partial z_x^{\,2}} \cdot dx \\ P_0 \cdot y_0 = \int_{\beta \div \alpha} y \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^{\,2} + \partial z_x^{\,2}} \cdot dx \\ P_0 \cdot z_0 = \int_{\beta \div \alpha} z \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^{\,2} + \partial z_x^{\,2}} \cdot dx. \end{cases}$$

§. 19.

Schwer-Punkt homogener Flächen.

1) Sind (Fig. 15.) $A'M'B'$ nud $A''M''B''$ zwei durch die Gleichungen

$$y' = y'_x \quad \text{und} \quad y'' = y''_x$$

gegebene Kurven (so dafs für jeden Werth, z. B. OM_1 von x, $M_1M' = y'$ und $M_1M'' = y''$ daraus berechnet werden können), und sind $OA_1 = \alpha$ und $OB_1 = \beta$ zwei Abscissen-Werthe für die auf der Abscissen-Axe OX senkrechten Geraden $A'A''$ und $B'B''$; so werden die Koordinaten-Werthe x_0, y_0 des Schwer-Punktes der als homogen gedachten Fläche $A'A''B'B''$, wenn P_0 den Inhalt dieser Fläche ausdrückt, aus folgenden Formeln gefunden:

$$I. \quad P_0 = \int_{\beta \div \alpha} (y'_x - y''_x) \cdot dx;$$

$$II. \quad \begin{cases} P_0 \cdot x_0 = \int_{\beta \div \alpha} x(y'_x - y''_x) \cdot dx; \\ P_0 \cdot y_0 = \tfrac{1}{2} \int_{\beta \div \alpha} (y'^{\,2}_x - y''^{\,2}_x) \cdot dx. \end{cases}$$

Und dieselben Formeln geben den Inhalt P_0 und die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punkts der Flächen-Figur $A'A_1B'B_1$ (die, statt von der Kurve $A''M''B''$ begrenzt zu seyn, von der Abscissen-Axe OA_1B_1X begrenzt ist), so oft man in ihnen 0 statt y''_x setzt. — Auch ist in den Anwendungen die zweite Grenz-Kurve häufig nur ein zweiter Zweig der erstern.

Denn, denkt man sich die Axe OX in unendlich viele unendlich kleine konstante und durch dx bezeichnete Theile zertheilt, und eben so OY in lauter durch dy bezeichnete Theile, und durch diese Theil-Punkte Parallelen bezüglich mit OY und mit OX gelegt, so zertheilt sich die ganze Fläche in lauter solche Rechteckchen, wie bei M eines zu sehen ist, und deren Inhalt $= dx \cdot dy$ ist. Daher drücken nach dem Hauptsatz der Integral-Rechnung §. 17. No. 5., wenn $x = OM_1$ und $y = MM_1$ die Koordinaten-Werthe dieser Stelle M vorstellen,

$$\int_{y'_x \div y''_x} (dx) \cdot dy, \qquad \int_{y'_x \div y''_x} (x \cdot dx) \cdot dy, \qquad \int_{y'_x \div y''_x} (y \cdot dx) \cdot dy,$$

oder, wenn man diese Integrationen wirklich ausführt, die Resultate

$$(y'_x - y''_x) \cdot dx, \qquad x(y'_x - y''_x) \cdot dx, \qquad \tfrac{1}{2}({y'_x}^2 - {y''_x}^2) \cdot dx$$

bezüglich den Inhalt und die Summe der Schwer-Punkts-Momente des Streifens von der Breite dx und von der Länge $M'M''$ aus, und zwar für jeden Werth von OM_1 oder x, so dafs jeder Streifen von $A'A''$ an bis zu $B'B''$ hin darunter verstanden ist, nach den verschiedenen Werthen von $x = \alpha$ an bis zu $x = \beta - dx$ oder $x = \beta$ hin. Die Formeln §. 11. No. 1., §. 12. No. 1. und der Satz §. 17. No. 5. geben dann das Uebrige.

Dieselben Formeln bleiben natürlich auch noch geltend, wenn die zweite Kurve gegen die Axe OX die Lage der Fig. 16. hat. An denjenigen Stellen wo y'' negativ wird, drückt $y' - y''$ die Summe der wirklichen Längen $M'M_1$ und $M''M_1$ aus, wie dies auch jetzt so seyn mufs.

Auf diesem Wege kann man auch den Schwer-Punkt eines beliebigen Dreiecks ABC berechnen (Fig. 8.), indem man AX senkrecht auf BC zur Abscissen-Axe nimmt, und statt der beiden Grenz-Kurven jetzt die Geraden AC und AB durch Gleichungen ausdrückt. Man erhält dann dasselbe Resultat, wie im §. 14. No. 2.

2) Denkt man sich (in Fig. 15. oder 16.) von O aus noch eine dritte Ordinaten-Axe OZ senkrenkt auf die Ebene XOY; denkt man sich eben so aus allen Punkten der beiden Grenz-Kurven $A'M'B'$ und $A''M''B''$ Senkrechte auf die Ebene XOY, so bilden letztere zwei Cylinder-Flächen (im allgemeinsten Sinne des Wortes), welche senkrecht auf der Ebene XOY stehen, und von der XOY in den Kurven $A'M'B'$ und $A''M''B''$ geschnitten werden. Denkt man sich ferner eine krumme Fläche, welche sich über XOY

hinwölbt und welche zwischen den Koordinaten-Werthen x, y und z durch eine Gleichung

$$z = z_{x,y}$$

gegeben ist, so werden die Koordinaten-Werthe x_0, y_0, z_0 des Schwer-Punktes desjenigen Stückes dieser krummen Fläche, welches in den mit OY parallelen Richtungen von den gedachten Cylinder-Flächen und aufserdem noch von zwei in A und B auf OX senkrechten Ebenen begrenzt ist, durch die nachstehenden Formeln gefunden (in denen P_0 den Inhalt dieses krummen Flächen-Stückes bedeutet), nämlich:

$$I.\quad P_0 = \int_{\beta \div \alpha} \left(\int_{y'_x \div y''_x} \sqrt{1 + \partial z_x{}^2 + \partial z_y{}^2} \cdot dy \right) \cdot dx;$$

$$II.\quad P_0 \cdot x_0 = \int_{\beta \div \alpha} \left(\int_{y'_x \div y''_x} x \cdot \sqrt{1 + \partial z_x{}^2 + \partial z_y{}^2} \cdot dy \right) \cdot dx;$$

und noch zwei solchen Gleichungen, in denen statt der Faktoren x_0 und x bezüglich y_0 und y, oder z_0 und z zu setzen sind. Und soll statt der zweiten Cylinder-Fläche (deren Grundrifs $A''M''B''$ ist) die Ebene XOZ als Grenze des krummen Flächen-Stückes eintreten, so bleiben dieselben Formeln gültig, nur dafs dann 0 (Null) statt y''_x gesetzt werden mufs.

Wird wiederum OX in lauter dx, und OY in lauter dy zertheilt, werden aber durch die Theil-Punkte Ebenen bezüglich senkrecht auf OY und OX gelegt, so zerlegt sich das krumme Flächen-Stück, welches sich über XOY hinwölbt, in lauter unendlich kleine vierseitige Stückchen, wovon die unendlich kleinen Rechtecke $dx \cdot dy$ die Projektionen in der Ebene XOY sind. Das über M liegende Stückchen hat aber zum Inhalt $\sqrt{1 + \partial z_x{}^2 + \partial z_y{}^2} \cdot dx \cdot dy$, und selbiger nach und nach mit x, mit y, mit z multiplicirt giebt die Schwer-Punkts-Momente desselben Stückchens. Die Formeln §. 11. No. 1. und der Satz §. 17. No. 5. geben nun aber sogleich die oben stehenden Resultate.

3) Denkt man sich (Fig. 14.) die durch die Gleichung

$$y = y_x$$

gegebene Kurve AMB um ihre Abscissen-Axe OX herumgedreht, so beschreibt sie eine in sich zusammenhängende

Umdrehungs-Fläche, so dafs alle auf OX senkrechten Ebenen dieselbe in Kreisen schneiden. Sind nun durch die Punkte A_1 und B_1, deren Abscissen-Werthe durch α und β vorgestellt seyn mögen, Ebenen gelegt, senkrecht auf OX, und versteht man unter P_0 den Inhalt, so wie unter x_0 den Abscissen-Werth des offenbar in OX selbst liegenden Schwer-Punktes dieses Stückes der Umdrehungs-Fläche, so werden P_0 und x_0 aus folgenden Formeln gefunden:

$$I. \qquad P_0 = 2\pi \cdot \int_{\beta \div \alpha} y \cdot \sqrt{1 + \partial y_x{}^2} \cdot dx$$

$$II. \qquad P_0 \cdot x_0 = 2\pi \cdot \int_{\beta \div \alpha} xy \cdot \sqrt{1 + \partial y_x{}^2} \cdot dx.$$

Dies Resultat geht aus No. 2. als ein besonderer Fall hervor. — Man erhält es aber auch direkt auf folgende Art. — Man zerlegt die Umdrehungs-Fläche durch unendlich viele auf OX senkrechte Ebenen, welche um das unendlich kleine dx von einander entfernt sind, in unendlich viele Ringstücke, die, wie abgekürzte Kegel-Oberflächen, deren Seite ds ist, berechnet, $= 2\pi y \cdot ds = 2\pi y \cdot \sqrt{1 + \partial y_x{}^2} \cdot dx$ sind; die ferner ihren Schwer-Punkt in der Axe OX haben, und deren Schwer-Punkts-Momente daher $= 2\pi xy \cdot ds = 2\pi xy \cdot \sqrt{1 + \partial y_x{}^2} \cdot dx$ sind, wobei x alle um dx von einander verschiedenen d. h. alle stetig neben einander liegenden Werthe, von $x = \alpha$ an bis zu $x = \beta$ hin, vorstellt. Die Formeln §. 11. No. 1. in Verbindung mit dem Hauptsatze der Integral-Rechnung (§. 17. No. 5.) giebt daher die obigen Resultate.

Auf diesem Wege findet man den Schwer-Punkt eines senkrechten Kegel-Mantels in seiner Axe um $\frac{1}{3}$ der Höhe von der Grundfläche, oder um $\frac{2}{3}$ der Höhe von der Spitze abstehend (wie im §. 14. No. 4.); desgleichen den Schwer-Punkt einer Kugel-Mütze in der Mitte ihrer Höhe (wie im §. 15. No. 5.).

§. 20.

Schwer-Punkt homogener Körper.

1) Denkt man sich alles wie im §. 19. No. 2., nur z' statt des dortigen z gesetzt, so dafs die sich über XOY hinwölbende Fläche durch die Gleichung

$$z' = z'_{x,y}$$

gegeben ist; denkt man sich aber noch eine zweite solche über oder unter XOY sich hinwölbende Grenz-Fläche

durch die Gleichung

$$z'' = z''_{x,y}$$

gegeben, so ist der Schwer-Punkt des Körpers, welcher in der Richtung OZ von diesen beiden gegebenen krummen Flächen, in der Richtung OY von den beiden durch $A'M'B'$ und $A''M''B''$ d. h. durch $y' = y'_x$ und $y'' = y''_x$ gegebenen Cylinder-Flächen, endlich durch die beiden in A_1 und B_1 auf OX senkrechten Ebenen begrenzt ist, durch folgende Rechnung gefunden, nämlich, wenn P_0 den Inhalt dieses Körpers vorstellt,

$$\text{I.} \qquad P_0 = \int_{\beta \div \alpha} \Big[\int_{y' \div y''} (z'_{x,y} - z''_{x,y}) \cdot dy\Big] \cdot dx$$

$$\text{II.} \quad \begin{cases} P_0 \cdot x_0 = \int_{\beta \div \alpha} \Big[\int_{y' \div y''} x(z' - z'') \cdot dy\Big] \cdot dx \\ P_0 \cdot y_0 = \int_{\beta \div \alpha} \Big[\int_{y' \div y''} y(z' - z'') \cdot dy\Big] \cdot dx \\ P_0 \cdot z_0 = \int_{\beta \div \alpha} \Big[\int_{y' \div y''} \tfrac{1}{2}(z'^2 - z''^2) \cdot dy\Big] \cdot dx. \end{cases}$$

Setzt man aber hier $z'' = 0$, so ist der Körper statt von einer zweiten krummen Fläche jetzt von der Ebene XOY begrenzt. — Setzt man auch noch $y'' = 0$, so ist der Körper P_0 auch von der Ebene XOZ begrenzt. — In den Anwendungen ist auch 1) die zweite begrenzende krumme Fläche oft blofs ein zweiter Lappen der erstern, so dafs z'' nur ein zweiter Werth von z' ist; 2) die Grenz-Kurven $y' = y'_x$ und $y'' = y''_x$ sind (entweder alle beide, oder doch eine davon) oft blofs Durchschnitts-Linien der krummen Fläche $z' = z'_{x,y}$ mit der Ebene XOY; u. dgl., welche Bemerkungen sich auch auf die Aufgabe §. 19. No. 2. erstrecken.

Man zerlegt sich den Körper in lauter rechtwinklige Parallelepipeda, deren Inhalt $dx \cdot dy \cdot dz$ ist, und deren Schwer-Punkts-Momente bezüglich $x \cdot dx \cdot dy \cdot dz$, $y \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ und $z \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ seyn werden, für jedes, welches die durch die Koordinaten-Werthe x, y, z gegebene, übrigens ganz beliebige Stelle einnimmt.

Das erste Integral (nach z) zwischen den Grenz-Werthen z'' und

z' von z, giebt nun den Inhalt und die Schwer-Punkts-Momente einer zu demselben x und demselben y gehörigen Latte, deren Länge $z'-z''$ ist, und welche den Querschnitt $dx \cdot dy$ hat. Diese erste Integration giebt aber bezüglich $(z'-z'') \cdot dx \cdot dy$, $x \cdot (z'-z'') \cdot dx \cdot dy$, $y(z'-z'') \cdot dx \cdot dy$ und $\frac{1}{2}(z'^2-z''^2) \cdot dx \cdot dy$. — Die zweite Integration (nach y) giebt den Inhalt und die Schwer-Punkts-Momente einer Scheibe, die aus allen diesen von $y=y''$ an bis zu $y=y'$ hin neben einander liegenden und zu demselben x gehörigen Latten besteht. — Die dritte Integration nach x mufs also dieselben Gegenstände für den ganzen Körper liefern.

2) Ist der Körper derselbe Umdrehungs-Körper, wie im §. 19. No. 3., so findet sich sein Inhalt P_0, und sein Schwer-Punkt, der übrigens immer in der Umdrehungs-Axe OX liegen mufs, aus nachstehenden Formeln:

$$I. \quad P_0 = \pi \cdot \int_{\beta \div \alpha} y^2 \cdot dx; \qquad II. \quad P_0 \cdot x_0 = \pi \cdot \int_{\beta \div \alpha} xy^2 \cdot dx;$$

wenn nur beide Integrale zwischen denselben Grenzen $x=\alpha$ und $x=\beta$ genommen werden.

Die Zerlegung §. 19. No. 3. in Scheiben, deren Inhalte $\pi y^2 \cdot dx$ und deren Schwer-Punkts-Momente $\pi x y^2 \cdot dx$ sind, giebt sogleich die vorstehenden Resultate nach §. 11. No. 1. und §. 17. No. 5.

Anmerkung. Wird der Umdrehungs-Körper dadurch erzeugt, dafs sich (Fig. 15.) die Fläche $A'A''B''B'$ um OX dreht, während hier $OM_1=x$, $M_1M'=y'$ und $M_1M''=y''$ ist, so findet sich der Inhalt P_0, und x_0 des Schwer-Punkts, aus den Gleichungen:

$$I. \qquad P_0 = \pi \cdot \int_{\beta \div \alpha} (y'^2 - y''^2) \cdot dx;$$

$$II. \qquad P_0 \cdot x_0 = \pi \cdot \int_{\beta \div \alpha} x(y'^2 - y''^2) \cdot dx.$$

§. 21.

Die Guldinische Regel.

Vergleicht man die Integrale mit einander welche die Inhalte und die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punkts liefern, so findet man bald folgende Resultate für Umdrehungs-Körper:

1) Jeder Bogen AMB (Fig. 14.) mit dem Wege mul-

tiplicirt, den sein Schwer-Punkt bei der Umdrehung beschreibt, giebt allemal den Inhalt der von diesem Bogen beschriebenen Umdrehungs-Fläche.

2) Jede Fläche AA_1B_1B (Fig. 14.) oder $A'A''B''B'$ (Fig. 15.), mit dem Wege multiplicirt, den der Schwer-Punkt derselben bei der Umdrehung beschreibt, giebt allemal den (körperlichen) Inhalt des dadurch erzeugten Umdrehungs-Körpers.

Der Satz No. 1. kann als ein besonderer Fall des Satzes No. 2. angesehen werden, wenn man sich nämlich in No. 2. die Fläche $A'A''B''B'$ immer schmaler und zuletzt in die bloſse Kurve übergehend denkt. — Endlich gelten diese beiden Sätze auch dann noch, wenn die Umdrehung nicht ganz erfolgt, so daſs die Schwer-Punkte bloſs Kreis-Bogen beschreiben.

Viertes Kapitel.

Von beliebigen Kräften, deren Richtungen aber alle in einer und derselben Ebene liegen und welche einen festen Körper gleichzeitig angreifen.

§. 22.

Theorie der Gegen-Paare.

1) Zwei gleiche parallele und entgegengesetzte Kräfte P, P nennen wir ein Gegen-Paar von Kräften, auch schlechtweg ein Gegen-Paar. Sie lassen sich nie in eine einzige Kraft vereinigen, halten sich aber auch nicht im Gleichgewicht, sondern lassen sich nur immer wieder durch ein anderes Gegen-Paar ersetzen (§. 10. Nr. 1.).

2) Die senkrechte Entfernung p der beiden, das Gegen-Paar bildenden Kräfte P, P heißt der Arm, — das Produkt P·p das Moment des Gegen-Paars; so wie jede auf die Ebene dieser Kräfte gedachte Senkrechte eine Axe des Gegen-Paars genannt wird.

3) Denkt man sich eine solche Axe des Gegen-Paars durch die eine der beiden, das Gegen-Paar bildenden Kräfte gehend, und den festen Körper selbst um diese Axe beweglich, so dreht die andere der Kräfte den festen Körper entweder in einer, oder in der entgegengesetzten Richtung um diese Axe herum; und dies bestimmt das, was man die (Dreh-) Richtung des Gegen-Paares nennt. Zwei Gegen-Paare haben daher entweder einerlei (Dreh-) Richtung (wie z. B. P, P und Q, Q Fig. 17.), oder entgegengesetzte (Dreh-) Richtung (wie z. B. P, P und R, R).

4) Wirken in einer und derselben Ebene zwei Gegen-Paare P, P und R, R (Fig. 17.) an beliebigen Stellen; sind dabei ihre Momente P·p und R·r einander gleich, ihre (Dreh-) Richtungen dagegen entgegengesetzt, so halten sich diese vier Kräfte (welche die beiden Gegen-Paare bilden) einander im Gleichgewicht.

Denn man verlängere die Richtungen dieser Gegen-Paare (Fig. 18.), bis sie sich in den Punkten ABCD, welche ein Parallelogramm bilden, schneiden, und denke sich P und R in A angebracht und in die mittlere S vereinigt, so muß diese mittlere Kraft, weil nach der Voraussetzung die Momente P·p und R·r gleich sind, weil sich also P und R zu einander verhalten, wie die Höhen, und deshalb auch wie die Seiten AD und AB des Parallologramms ABCD, — der Richtung nach mit der Richtung der Diagonale CA zusammenfallen. Die andern beiden Kräfte P und R kann man in dem Punkte C angreifen lassen, und sie vereinigen sich daselbst in eine mittlere Kraft S, welche aus demselben Grunde mit der Richtung der Diagonale AC zusammenfällt, so daß sie der erstern Kraft S gleich und genau entgegen ist. Diese beiden Kräfte S, S vernichten sich also. Welches zu erweisen war.

5) Daher kann statt eines Gegen-Paares P, P, in derselben Ebene jedes andere Gegen-Paar gesetzt werden, welches mit dem ersteren dieselbe (Dreh-) Richtung und gleiches Moment hat.

6) Namentlich kann man statt eines jeden Gegen-Paares P, P, welches den Arm p, also das Moment P·p = M hat, ein anderes M, M setzen, welches die Raum-Einheit zum Arm hat, d. h. in welchem die Entfernung der beiden gleichen, parallelen aber entgegengesetzten Kräfte M, M, = 1 ist; sobald man nur

das letztere Gegen-Paar in derselben Ebene beliebig wie und beliebig wo angreifen läßt, und ihm mit P, P einerlei (Dreh-) Richtung giebt. — Ein Gegen-Paar, dessen Arm = 1 ist, kann man ein reducirtes Gegen-Paar nennen; und in selbigem ist jede der beiden gleichen Kräfte zu gleicher Zeit das Moment des Gegen-Paares.

7) Von jedem Gegen-Paar braucht man daher nur sein Moment M, seine Ebene und seine (Dreh-) Richtung zu kennen, um es hinreichend gegeben zu haben. Nimmt man dann in derselben Ebene zwei gleiche Kräfte M, M in der senkrechten Entfernung 1, oder zwei gleiche Kräfte $\frac{M}{q}$, $\frac{M}{q}$ in der senkrechten Entfernung q von einander, während q ganz beliebig (bald größer, bald kleiner) gedacht wird, so hat man immer ein Gegen-Paar, welches dasselbe Moment hat. Giebt man ihm nun auch noch dieselbe (Dreh-) Richtung, so kann es nach Nr. 5. statt des in Rede stehenden Gegen-Paares gesetzt werden.

Man sagt daher auch häufig bloß: das Gegen-Paar M, wenn man sagen sollte „das Gegen-Paar, dessen Moment = M ist".

8) Sind in einer Ebene zwei Gegen-Paare gleichzeitig wirksam, deren Momente bezüglich M' und M'' sind, so kann man dafür ein einziges Gegen-Paar setzen (in derselben Ebene), dessen Moment M = M' + M'' ist, und welches mit M' einerlei (Dreh-) Richtung hat, sobald man nur, im Falle M'' die entgegengesetzte (Dreh-) Richtung hat, statt M'' eine negative Zahl (in diese Rechnung) substituirt; und, im Falle diese Rechnung M selbst negativ geben sollte, die (Dreh-) Richtung des Gegen-Paares (— M) die entgegengesetzte von M' seyn läßt.

Sollte aber die Summe M' + M'', = 0 sich ausweisen, so würden diese beiden Gegen-Paare sich im Gleichgewicht halten.

Da man statt der beiden gegebenen, andere (reducirte) Gegen-Paare setzen kann, welche die Kräfte M', M' und M'', M'', dagegen beide einen und denselben Arm = 1 haben, und da man diese letzteren Gegen-Paare in derselben Ebene beliebig wohin verlegen kann, so kann man die Kräfte M' und M'' (und zwar beide Paare) zusammenfallen lassen. Dann entste-

hen zwei Kräfte, jede $= M' \pm M''$ in der Entfernung 1, welche dieses neue Gegen-Paar M bilden. — So fällt die vorstehende Behauptung in die Augen.

9) Beliebig viel Gegen-Paare, deren Momente bezüglich M_1, M_2, M_3, $\cdots M_n$ sind, welche in einer und derselben Ebene wirken, und welche den Körper gleichzeitig angreifen, lassen sich allemal in ein einziges Gegen-Paar vereinigen, welches in derselben Ebene wirkt und dessen Moment $M, = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n$ ist, wenn man nur diejenigen Momente als negative Zahlen (in diese Rechnung) einführt, deren Gegen-Paare die entgegengesetzte (Dreh-) Richtung haben, so daß, wenn M selbst negativ sich ausrechnen sollte, dies ein Beweis ist, daß das neue Gegen-Paar M mit den letztern einerlei (Dreh-) Richtung hat, in Vergleich mit den erstern aber, deren Momente als positive Zahlen (in diese Rechnung) gesetzt worden sind, die entgegengesetzte (Dreh-) Richtung annimmt.

So wie jedoch diese Rechnung $M = 0$ giebt, so halten sich alle n Gegen-Paare im Gleichgewicht.

§. 23.

1) Wählt man in der Ebene, in welcher eine Kraft P liegt, die der Größe und Richtung nach durch AB (Fig. 19.) ausgedrückt seyn, und den Angriffs-Punkt A haben mag, — einen beliebigen Punkt O, — fällt man von O aus auf die Richtung AB der Kraft, die senkrechte $OE = p$, so wird das Produkt $AB \cdot OE$ oder $P \cdot p$ das statische Moment dieser Kraft P in Bezug auf das (beliebig gewählte) Centrum O, genannt. Die Senkrechte OE oder p heißt der Arm desselben.

2) Denkt man sich in O zwei mit $P = AB$ parallele und gleiche, aber einander genau entgegengesetzte Kräfte $OC = OD = AB = P$ angebracht, so vernichten sich diese letzteren, und wenn alle drei gleichzeitig angreifen, so ist die Wirkung dieselbe, wie wenn P in A allein angreift.

Nun ist aber OC mit der in A angreifenden Kraft P gleich und parallel und in demselben Sinne wirkend, während die beiden anderen Kräfte OD und AB offenbar gleich und parallel

sind, aber im entgegengesetzten Sinne wirken, also ein Gegen-Paar bilden, dessen Moment $= P \cdot p$, also genau das **statische Moment** der Kraft P in A ist, in Bezug auf das Centrum O, dessen (Dreh-) Richtung aber durch den Sinn bedingt wird, in welchem die Kraft P die Ebene um diesen Punkt O drehen würde, sobald selbige um diesen beliebigen Punkt O beweglich gedacht wird.

3) Jede Kraft $P = AB$, welche den gegebenen Punkt A angreift, kann man daher parallel mit sich nach einem anderen beliebigen Angriffs-Punkt O fortrücken, wenn man nur gleichzeitig mit $P = OC$, die jetzt den Punkt O angreift, noch ein Gegen-Paar beliebig wo in der Ebene angreifen läßt, dessen Moment dem statischen Momente der gegebenen Kraft $P = AB$ (die den gegebenen Angriffs-Punkt A hat) in Bezug auf das Centrum O, gleich ist; während die (Dreh-) Richtung dieses Gegen-Paares durch die Lage der Kraft $P = AB$ gegen O bedingt ist.

4) Sind daher beliebig viel Kräfte gegeben, z. B. P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, welche bestimmte Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 angreifen und dabei mit ihren Richtungen in einer und derselben Ebene liegen, — so kann man jede dieser Kräfte parallel mit sich fortrücken und einen beliebig gewählten Versammlungs-Punkt O gemeinschaftlich angreifen lassen, wenn man nur gleichzeitig mit diesen, nun den Punkt O angreifenden Kräften P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, in derselben Ebene noch eben so viele Gegen-Paare gleichzeitig angreifen läßt, deren Momente bezüglich die statischen Momente $P_1 \cdot p_1$, $P_2 \cdot p_2$, $P_3 \cdot p_3$, $P_4 \cdot p_4$, $P_5 \cdot p_5$ der gegebenen Kräfte an ihren verschiedenen Angriffs-Punkten sind, in Bezug auf den Versammlungs-Punkt O als Centrum genommen (so daß p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 die senkrechten Entfernungen des Punktes O von den Richtungen der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 vorstellen).

Die den Punkt O angreifenden Kräfte vereinigen sich aber (nach §. 4. Nr. 2.) in eine einzige P', welche ebenfalls den Punkt O angreift; oder sie halten sich einander im Gleichgewicht. — Die noch gleichzeitig angreifenden Gegen-Paare vereinigen sich

ebenfalls in ein einziges Gegen-Paar, dessen Moment $L = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3 + P_4 \cdot p_4 + P_5 \cdot p_5$ d. h. der Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte gleich ist; — oder dieselben Gegen-Paare halten sich im Gleichgewicht, und zwar wenn die Summe L der statischen Momente der Null gleich ist.

Alle gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 halten sich also entweder im Gleichgewicht; oder sie bilden ein Gegen-Paar, dessen Moment $= L$ ist; oder sie vereinigen sich in die einzige mittlere Kraft P', welche den Versammlungs-Punkt O angreift; oder endlich, es tritt zu dieser Kraft P' in O noch ein Gegen-Paar von Kräften hinzu, dessen Moment $= L$ ist. — In diesem letztern Fall kann man aber eine der beiden gleichen Kräfte L, L, welche in der Entfernung 1 von einander wirken, mit P' zusammenfallen lassen, so daß man zwei parallele Kräfte $P' + L$ und L hat, welche um die Raum-Einheit von einander abliegen, im entgegengesetzten Sinne wirken und sich nach §. 10. Nr. 2. in eine einzige $P_0 = P'$ vereinigen lassen, welche von der P' selbst, oder von O, um $\frac{\pm L}{P'}$ abliegt.

§. 24.

Dies führt uns sogleich zu folgenden Haupt-Wahrheiten:

1) Beliebig viel gegebene Kräfte in einer Ebene, z. B. P_1, P_2, $P_3 \cdots P_n$, welche beliebige Angriffs-Punkte haben, stehen im Gleichgewicht, wenn

a) die Summen X und Y der Projektionen dieser Kräfte auf jede von zwei beliebig angenommenen (Koordinaten-) Axen, der Null gleich ist, — unter der Voraussetzung, daß man die Projektionen als negativ in Rechnung bringt, sobald die Kräfte mit der Axe einen stumpfen Winkel machen; — und wenn noch

b) die Summe L der statischen Momente dieser Kräfte P_1, $P_2, \cdots P_n$, in Bezug auf ein beliebiges Centrum O, der Null gleich wird; vorausgesetzt daß die statischen Momente mit entgegengesetzten Zeichen in Rechnung gebracht werden,

wenn die zugehörigen Kräfte um O im entgegengesetzten Sinne drehen wollen.

2) Sind die ersten beiden Bedingungen (in a.) erfüllt, die letzteren (b.) aber nicht, so reduciren sich alle gleichzeitig angreifenden Kräfte P_1, P_2, $P_3 \cdots P_n$ auf zwei gleiche parallele und entgegengesetzte Kräfte, also auf ein Gegen-Paar, dessen Moment L der Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte, in Bezug auf ein beliebig genommenes Centrum *), gleich ist. Zeigt sich dabei L $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$, so ist die (Dreh-) Richtung dieses Gegen-Paares durch den Sinn derjenigen der Kräfte bestimmt, deren statische Momente als $\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right\}$ Zahlen in die Rechnung eingeführt worden sind.

3) Ist die letztere Bedingung (b.) in Bezug auf einen bestimmten, übrigens beliebigen Punkt O erfüllt, sind aber nicht die ersteren (a.) beide zugleich erfüllt, so vereinigen sich alle gegebenen Kräfte in eine einzige Kraft P_0, welche dieselbe ist, die man erhalten würde, wenn man alle Kräfte P_1, P_2, $P_3 \cdots P_n$ nach diesem bestimmten Punkt O hin parallel mit sich fortgerückt, und diesen Punkt O gleichzeitig angreifend denken wollte, und unter dieser Voraussetzung die einzige mittlere Kraft P_0 (nach §. 4. Nr. 2.) bestimmte, die dann diesen Punkt O selbst angreift.

4) Trifft man aber in dem Falle, wo eine einzige mittlere Kraft P_0 existirt, bei der willkührlichen Annahme des Versammlungs-Punktes O, nicht gerade zufällig einen Punkt der in der Richtung dieser einzigen mittleren Kraft P_0 liegt, — dann werden weder die ersteren Bedingungen (a.) alle beide erfüllt seyn, noch die letztere Bedingung (b.); und in diesem Falle wird die

---

*) Sind die erstern beiden Bedingungen (a.) erfüllt, so ist die Summe der statischen Momente für jeden anderen Punkt O doch immer eine und dieselbe.

Umgekehrt also: Wenn für 3 Punkte O die Summe der statischen Momente jedesmal der Null gleich ist, so wird man im Allgemeinen (d. h. mit Ausnahmen) auch alle Bedingungen des Gleichgewichts haben.

mittlere Kraft P_0 ihrer Größe, ihrer Richtung und ihrem Angriffs-Punkte nach auf folgende Art gefunden.

Zuerst denkt man sich alle Kräfte P_1, P_2, $P_3, \cdots P_n$ parallel mit sich nach diesem beliebigen Punkt O fortgerückt und letzteren gleichzeitig angreifend, und bestimmt (nach §. 4. Nr. 2.) die einzige mittlere, den Punkt O angreifende Kraft $OC = P'$ (Fig. 20. oder Fig. 21.), welche dasselbe leistet. Hernach berechnet man die Summe L der (positiv und negativ in die Rechnung gebrachten) statischen Momente der gegebenen Kräfte P_1, P_2, $P_3, \cdots P_n$ in Bezug auf denselben Punkt O als Centrum genommen; zieht OA senkrecht auf $OC = P'$, macht $OA = \frac{\pm L}{P'}$ (so daß OA nicht negativ wird), und der Punkt A ist dann der Angriffs-Punkt der gesuchten mittleren Kraft P_0, welche mit $OC = P'$ gleich und parallel genommen werden muß und auch in demselben Sinne. Ob aber $OA = \frac{\pm L}{P'} = \frac{\pm L}{P_0}$ nach der einen Seite, von $OC = P'$ wie in Fig. 20., oder nach der andern Seite von OC, wie in Fig. 21., getragen werden müsse? — dazu dient als Richtschnur die Wahrheit:

„daß das statische Moment der mittleren Kraft P_0 (in Be-
„zug auf denselben Punkt O), der Summe L der statischen
„Momente der gegebenen Kräfte P_1, $P_2, \cdots P_n$ gleich, also
„$\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ werden müsse, wenn L $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ gefunden wor-
„den ist."

Danach bestimmt sich nämlich, in welchem Sinne P_0 um O drehen, also auch auf welcher Seite von OC die Kraft P_0 zu liegen kommen muß.

§. 25.

Verfolgen wir diese Resultate durch Rechnung; legen wir zu dem Ende durch einen beliebigen Punkt O der Ebene zwei beliebige, aber auf einander senkrechte (Koordinaten-) Axen; bezeichnen wir durch x_1, y_1; x_2, y_2; $x_3, y_3; \cdots x_n, y_n$ die Koor-

dinaten-Werthe der Angriffs-Punkte A_1, A_2, A_3, $\cdots A_n$ der gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3, $\cdots P_n$; und bezeichnen wir endlich durch α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3; $\cdots \alpha_n$, β_n die Winkel, welche diese Kräfte bezüglich mit den Axen OX und OY (oder mit beliebigen Geraden, welche bezüglich mit OX und OY parallel gedacht werden) machen. Wird dann

a) $\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = X$; b) $\Sigma(P \cdot \cos\beta) = Y$;

so wie noch

c) $\Sigma P(y \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\beta) = L$

gesetzt, wo statt $\cos\beta$ allemal auch $\sin\alpha$ geschrieben werden kann, wenn man dann nur die Winkel α von 0^0 bis zu 360^0 hin zählt (S. Anmerkung 4. zu §. 4.), so sind allemal X und Y die Summen der Projektionen der gegebenen Kräfte bezüglich auf OX und OY, während dagegen L allemal die Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte, in Bezug auf den Punkt O (als Centrum der Momente) genommen, ausdrückt *).

1) Ist nun

I. $X = 0$, II. $Y = 0$ und III. $L = 0$,

so halten sich alle Kräfte P_1, P_2, P_3, $\cdots P_n$ im Gleichgewicht.

2) Ist zwar $X = 0$ und $Y = 0$; ist aber nicht L der Null gleich, so reduciren sich alle Kräfte auf ein Gegen-Paar, dessen Moment und (Dreh-) Richtung durch den (positiven oder negativen) Werth von L gegeben ist. Ist nämlich L positiv, so ist die (Dreh-) Richtung dieses Gegen-Paares L, von OY nach OX hin (durch den rechten Winkel YOX durch). — Ist aber L negativ, so ist die (Dreh-) Richtung dieses Gegen-Paares L die entgegengesetzte.

3) Ist $L = 0$ aber nicht zu gleicher Zeit $X = 0$ und $Y = 0$, so vereinigen sich alle Kräfte P_1, P_2, P_3, $\cdots P_n$ in eine einzige P_0, welche

*) Dies fällt am einfachsten in die Augen, wenn man die Kraft P in die zwei Seiten-Kräfte $P \cdot \cos\alpha$ und $P \cdot \cos\beta$ zerlegt, und von dem Satz (§. 24. Nr. 4.) ausgeht, nach welchem für jeden Punkt O, das statische Moment der mittleren Kraft P gleich ist der Summe der statischen Momente der Seiten-Kräfte $P \cdot \cos\alpha$ und $P \cdot \cos\beta$; denn dann folgt augenblicklich $P \cdot p = (P \cdot \cos\alpha) \cdot y - (P \cdot \cos\beta) \cdot x$.

welche den Punkt O angreift, und welche der Größe und Richtung nach durch die Gleichungen

$$\text{I. } P_0 \cdot \cos\alpha_0 = X \quad \text{und} \quad \text{II. } P_0 \cdot \cos\beta_0 = Y$$

gegeben ist, wenn α_0 und β_0 die Winkel vorstellen, welche P_0 mit den Axen OX und OY macht. Diese Gleichungen liefern dann noch

$$\text{III. } P_0 = +\sqrt{X^2+Y^2} \quad \text{oder} \quad \text{IV. } \pm tg\,\alpha_0 = \frac{Y}{X},$$

so daß hier genau, wie im §. 4. gezeigt, zu verfahren ist.

4) Ist endlich L nicht Null, und sind auch nicht X und Y alle beide der Null gleich, so vereinigen sich wieder alle Kräfte in eine einzige mittlere Kraft P_0, welche der Größe und Richtung nach wiederum aus den Gleichungen

$$\text{I. } P_0 \cdot \cos\alpha_0 = X \quad \text{und} \quad \text{II. } P_0 \cdot \cos\beta_0 = Y$$

gefunden werden muß, wie in Nr. 3., welche aber nun nicht durch den Punkt O geht, sondern von O senkrecht um die absolute Länge $\frac{\pm L}{P_0}$ absteht. Man legt daher durch O eine Gerade OC (Fig. 20. und 21.), welche mit OX und OY die berechneten Winkel α_0 und β_0 macht, errichtet darauf eine Senkrechte $OA = \frac{\pm L}{P_0}$ und hat dann den Angriffs-Punkt A dieser mittleren Kraft P_0, den man so wie in Fig. 20. nehmen muß, wenn L positiv, oder so wie in Fig. 21., wenn L negativ ist.

Sind x_0 und y_0 die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes N (Fig. 20. oder Fig. 21.) dieser mittleren Kraft P_0, so findet man zwischen ihnen sogleich die Gleichung

$$\text{III. } X \cdot y_0 - Y \cdot x_0 + L = 0 \text{ *)},$$

wodurch die Lage der Geraden AB, in welche die Richtung der

*) Es ist nämlich, wenn man (Fig. 20.) NR, QS senkrecht auf AB, OA fällt, $QN \cdot \cos\alpha_0 = NR$, also $y_0 \cdot \cos\alpha_0 = -NR$; eben so $QO \cdot \cos\beta_0 = OS$ d. h. $x_0 \cdot \cos\beta_0 = OS$; folglich $y_0 \cdot \cos\alpha_0 - x_0 \cdot \cos\beta_0 = -NR - OS = -OA = \frac{-L}{P_0}$; und dies ist die obige Gleichung III., sobald sie mit P_0 wegmultiplicirt wird. — Ganz Analoges gilt in Fig. 21.

mittleren Kraft P_0 fällt, analytisch gegeben ist, so daß man nun den Angriffs-Punkt A selbst nicht mehr braucht, in so ferne jeder durch x_0 und y_0 bestimmte Punkt N zum Angriffs-Punkt genommen werden kann.

Schluß-Anmerkung. In den meisten Anwendungen kommen nur die drei Bedingungen des Gleichgewichts §. 24. Nr. 1. oder §. 25. Nr. 1. vor. — Die gewöhnlichsten und wichtigsten dieser Anwendungen mag nun das folgende Kapitel gleich sehen lassen.

Fünftes Kapitel.

Anwendungen der statischen Lehren der vorhergehenden Kapitel.

§. 26.

Allgemeine Principien für das lose System.

In den Anwendungen kommen gewöhnlich zwei oder mehr feste Körper vor, welche sich dadurch im Gleichgewicht halten, daß sie sich gegenseitig vermöge der auf sie wirkenden Kräfte drücken, und daß also das Gleichgewicht eines jeden durch die auf ihn wirkenden Kräfte und noch durch den Druck, den er von den anliegenden festen Körpern zurück erhält, bewirkt wird. — Ein solches System zweier oder mehrerer fester Körper im Gleichgewicht heißt „ein loses System im Gleichgewicht."

Jeder Körper, welcher zu einem losen System gehört, wird von dem andern an einer (ebenen oder krummen) Fläche, oder an einer (geraden oder krummen) scharfen Kante, oder an nur einer Spitze oder Ecke gedrückt. Es sind aber folgende Principien vorzüglich fest zu halten.

Zwei feste Körper eines losen Systems können nur dann im Gleichgewicht seyn, wenn

1) Druck und Gegendruck einander genau gleich und genau entgegen sind; und

2) wenn jeder Druck senkrecht auf die gedrückte Fläche, oder senkrecht auf die gedrückte scharfe Kante wirkt.

3) Daher müssen die Oberflächen oder scharfen Kanten zweier Körper eines losen Systems im Gleichgewicht, an der Stelle wo sich letztere gegenseitig drücken, eine gemeinschaftliche Normale haben; wenn nämlich das Gleichgewicht soll möglich seyn können.

§. 27.

Allgemeine Principien der Reibung.

Ist ein loses System im Gleichgewicht, so greifen an der Stelle, wo sich zwei feste Körper dieses Systems drücken, die Vertiefungen und Erhabenheiten des einen in die des andern dergestalt ein, daß dieses Gleichgewicht lange noch nicht gestört wird, wenn auch eine neue Kraft noch hinzutritt, welche senkrecht auf den Druck (also tangentiell mit den gedrückten Stellen) auf jeden von beiden sich drückenden Körpern, auf jeden aber in entgegengesetzter Richtung, wirkt, sobald diese Kraft nicht groß genug ist. — Wird aber diese tangentiell mit den gedrückten Stellen wirkende Kraft gerade so groß gedacht, daß sie eben ausreicht, das Gleichgewicht zu stören, ohne größer oder kleiner zu seyn, so wird sie die „Reibung" genannt.

Ueber die „Reibung" sind vielfältig und sorgfältig Versuche (besonders von Coulomb und Morin) angestellt worden, welche folgendes Resultat geliefert haben:

1) Die Reibung vermehrt sich mit der Rauhigkeit der sich reibenden Flächen, wird daher durch Schmieren vermindert, obgleich letzteres wieder eine Adhäsion hervorbringt.

Bei den folgenden Gesetzen sind möglichst glatte oder polirte Flächen vorausgesetzt.

2) Die Reibung ist unter übrigens gleichen Umständen dem Drucke proportional.

3) Bei gleichem Drucke ist unter übrigens gleichen Umständen die Reibung unabhängig von der Größe der sich reibenden Flächen.

4) Die Reibung der Ruhe ist größer als die Reibung der Bewegung, und die gleitende Reibung größer als die wälzende (wo sich ein Cylinder oder ähnlicher Körper auf einer Fläche hinrollt).

5) Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit, mit welcher die sich reibenden Körper an einander vorbei getrieben werden.

Diesen Erfahrungs-Gesetzen zu Folge bringt man, — wenn Q der bekannte oder unbekannte Druck ist, mit welchem die Flächen gegen einander gedrückt werden, — die gleitende Reibung allemal dadurch in Rechnung,

daß man sie als eine Kraft ansieht, welche der Größe nach durch $\mu \cdot Q$ ausgedrückt ist, welche der Richtung nach senkrecht auf der Richtung des Druckes steht, und der jedesmal beabsichtigten oder durch die Reibung gehinderten Bewegung genau entgegen wirkt, so daß, wenn unter der Voraussetzung, daß diese Reibung noch hinzutritt, alle Bedingungen des Gleichgewichts erfüllt sind, dann der geringste Anstoß in der Richtung der beabsichtigten Bewegung, diese letztere allemal sogleich wirklich hervorbringt (während dann in jeder anderen Richtung größere oder geringere Anstöße nöthig sind, um in dieser anderen Richtung eine Bewegung wirklich hervorzubringen).

Die Zahl μ heißt der Reibungs-Koefficient. — Aus den Versuchen hat man folgende Tafeln gezogen für den Werth von μ, bei gleitender Reibung der Ruhe.

Reibende Körper mit möglichst glatten Flächen ohne oder mit Schmiere.	Schiebende Reibung wo ein Körper über den andern weggeschoben wird.						Drehende Reibung z. B. Zapfen in Zapfenlagern.				
	Trocken —	Talg	Theer	Oel	Abgen. Talg	Trocken +	Trocken	Talg	Theer	Oel	Abgen. Talg
Eichen auf Eichen . . .	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{5}$	—	—	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{15}$					
Kiefern auf Kiefern . . .	$\frac{7}{12}$	—	—	—	—	—					
Ulmen auf Ulmen . . .	$\frac{6}{13}$	—	—	—	—	—					
Eichen auf Kiefern . . .	$\frac{2}{3}$	—	—	—	—	—					
Steineichen auf Guajac . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\frac{1}{16}$
Eisen auf Eisen	$\frac{2}{7}$	—	—	—	—	—					
Kupfer auf Eisen	$\frac{3}{17}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{6}$	—	—	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{20}$	—	—
Eisen auf Guajac . . .	—	—	—	—	—	—	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	—	—	—
Eisen auf Eichen	$\frac{1}{5}$	—	—	—	—	$\frac{1}{14}$					
Kupfer auf Eichen . . .	$\frac{2}{11}$										
Messing auf Eisen . . .	$\frac{4}{15}$										

Das Zeichen (—) bedeutet hier, daß die reibenden Körper nach der Richtung der Holzfasern bewegt worden sind, und (+) bedeutet, daß sich die Holzfasern durchkreuzen.

Anmerkung. Das Vorstehende gilt alles von der gleitenden Reibung. — Bei der wälzenden Reibung, die z. B. statt findet, wenn eine Walze auf einer Ebene rollt, ist dagegen die Reibung nicht durch μQ, sondern durch $\mu \frac{Q}{r}$ in Rechnung zu bringen, wo r der Halbmesser der Walze ist, — wie ebenfalls aus Versuchen des Coulomb hervorgeht. — Wird Q in Pariser Pfunden und r in Pariser Zollen ausgedrückt, so kann man hier statt μ setzen die Zahl

0,018 oder $\frac{1}{56}$ bei Walzen von Guajac auf Eichenholz
0,03 bei " " Ulmen " "

Im Verlaufe dieses Kapitels ist jedoch von dieser Reibung nie die Rede, so wenig wie von Reibung während der Bewegung, über welche letztere das „Lehrbuch der Mechanik" Th. II. Kap. XI. nachgesehen werden kann.

Und nun mögen die Anwendungen folgen.

§. 28.

Auf zweien Unterlagen A und B (Fig. 22.) liegt horizontal ein Balken AB von der Länge l, dessen Gewicht = P ist und

dessen Schwer-Punkt E in seiner Mitte liegt. In C, während BC = b ist, wirkt eine Last L vertikal nach unten. Man soll bestimmen die Drucke N und R, mit welchen die Unterlagen A und B (nach unten) gedrückt werden.

Ansatz der Aufgabe. Der Balken hält sich im Gleichgewicht (nach §. 26.) vermöge der Kräfte P, L und der vertikalen Gegen-Drucke N und R (der Unterlagen) nach oben. Die drei Bedingungen des Gleichgewichts §. 24. Nr. 1. geben daher jetzt, wenn man die Axen horizontal und vertikal sich denkt,

1) die Summe aller auf den Horizont projicirten Kräfte = 0; diese Gleichung wird aber hier identisch 0 = 0;

2) die Summe aller vertikal projicirten Kräfte, = 0, d. h.

$$N + R - P - L = 0;$$

3) endlich die Summe aller statischen Momente der Kräfte in Bezug auf ein beliebiges Centrum z. B. B, genommen, = 0; d. h. $N \times BA - P \times BE - L \times BC = 0$, oder

$$lN - \tfrac{1}{2}lP - bL = 0.$$

Auflösung der Gleichungen. Diese Gleichungen geben sogleich

$$N = \frac{bL + \frac{1}{2}lP}{l} = \tfrac{1}{2}P + \frac{b}{l} \cdot L;$$

$$R = P + L - N = \tfrac{1}{2}P + \frac{l-b}{l} \cdot L.$$

Anmerkung. Giebt man dieselbe Aufgabe noch einmal, jedoch unter der Bedingung, daß die Last L wegfällt, dagegen in C eine Kraft Q unter dem Winkel DCB = α angreift, so enthält die erstere Gleichung, wenn man keine Reibung statt finden läßt, einen Widerspruch, weil sie jetzt nicht mehr 0 = 0, sondern $Q \cdot \cos\alpha = 0$ wird, während Q und α gegeben sind. — Dieser Widerspruch zeigt an, daß unter den jetzt gemachten Voraussetzungen das Gleichgewicht nicht bestehen kann, wenn nicht horizontal ein Gegendruck $= Q \cdot \cos\alpha$ statt findet.

Bringt man daher bei der jetzigen Aufgabe in B noch ein Widerlager an, welches den Balken verhindert, nach B hin sich zu bewegen, so erleidet dieses Widerlager noch einen Druck S, und der (Gegen-) Druck S dieses Widerlagers auf den Balken in der Richtung BA, stellt nun das Gleichgewicht des Balkens

wieder her. Außerdem wirkt auch jetzt die Reibung bei A und B, welche bezüglich μN und μ'R ist, und ebenfalls in der Richtung von B nach A hin wirkt. Die 3 Gleichungen des Gleichgewichts werden daher jetzt

1) $$Q \cdot \cos\alpha - S - \mu N - \mu' R = 0,$$

2) $$N + R - P - Q \cdot \sin\alpha = 0,$$

3) $$N \times l - P \times \tfrac{1}{2} l - Q \cdot \sin\alpha \times b = 0 \text{ *)}.$$

Aus diesen 3 Gleichungen kann man nun N, R und S finden; nämlich

$$N = \tfrac{1}{2} P + \frac{b}{l} \cdot Q \cdot \sin\alpha;$$

$$R = \tfrac{1}{2} P + \frac{l - b}{l} \cdot Q \cdot \sin\alpha;$$

und $$S = Q \cdot \cos\alpha - \tfrac{1}{2}(\mu + \mu')P - \frac{\mu b + \mu'(l - b)}{l} \cdot Q \cdot \sin\alpha.$$

Zeigt sich hieraus S = 0, so ist dies ein Beweis, daß die bloße Reibung gerade ausreicht, um das Gleichgewicht zu erhalten, und daß das Widerlager gar keinen (Seiten-) Druck erleidet, daher für das Gleichgewicht ganz unnöthig ist. Zeigt sich aber S negativ, so geht daraus hervor, daß nicht nur das Widerlager gar nicht gedrückt wird, sondern daß noch eine Kraft, dem absoluten Werthe von S gleich, den Balken von A nach B ziehen könnte, und die bloße Reibung würde doch noch ausreichen, um das Gleichgewicht zu erhalten.

§. 29.

Es sey derselbe horizontal liegende Balken, von der Länge l und dem Gewicht P, dessen Schwer-Punkt in seiner Mitte liegt, an drei Stellen A, B, C (Fig. 23.) unterstützt, und es wirke in D eine Last L vertikal nach unten, während CD = b, CB = a und CA = l gegeben sind. Man soll die Drucke N, S und R finden, welche die Unterlagen zu erleiden haben.

---

*) Da die Kräfte μN, μ'R, S und R alle durch den Punkt B gehen, so sind ihre Momenten-Arme in Bezug auf B der Null gleich; daher fallen diese Momente aus der Gleichung ganz weg.

Ferner ist, um das statische Moment von Q bequem zu erhalten, statt Q sogleich $Q \cdot \cos\alpha$ und $Q \cdot \sin\alpha$ gesetzt worden, um statt des statischen Momentes von Q, die Summe der statischen Momente dieser Seiten-Kräfte setzen zu können. Das eine derselben ist aber = 0, das andere $Q \cdot \sin\alpha \times b$.

Dasmal halten die Kräfte N, S, R vertikal nach oben gedacht, und P, L nach unten (nach §. 26.) den Balken im Gleichgewicht. Daher hat man dasmal die drei Gleichungen des Gleichgewichts

1) $0 = 0$
2) $N + S + R - P - L = 0$
3) $N \times l + S \times a - P \times \frac{1}{2}l - L \times b = 0.$

Diese 3 Gleichungen, weil die erstere identisch ist, bestimmen nur zwei der unbekannten Drucke N, S und R; der eine derselben bleibt also unbestimmt. Drückt man N und S in R aus, so erhält man

$$S = \frac{\frac{1}{2}lP + (l-b)L - Rl}{l-a},$$

$$N = \frac{aR - (a - \frac{1}{2}l)P - (a-b)L}{l-a};$$

woraus hervorgeht, daß R nicht größer als $\frac{1}{2}P + \frac{l-b}{l}L$ und auch nicht kleiner als $\frac{(a-\frac{1}{2}l)P + (a-b)L}{a}$ seyn könne, weil außerdem entweder S oder N negative Werthe annehmen würden.

In der Wirklichkeit erleidet jede der drei Unterlagen einen völlig bestimmten Druck. Dies kommt aber daher, weil die Materie nachgiebt, der Balken sich biegt, die Unterlagen, wenn sie zu stark gedrückt werden, etwas weichen, und dadurch die in der Aufgabe gemachten Voraussetzungen nicht mehr in all ihrer Strenge erfüllt sind. Könnte man diese Nachgiebigkeit der Materie in Rechnung bringen, so würde man noch die fehlende Gleichung erhalten, so daß dann N, S und R genau so bestimmt seyn würden, wie sie in der Wirklichkeit statt finden.

§. 30.

Ein Balken, dessen Gewicht $= P$ und Länge $= l$ ist, und dessen Schwer-Punkt in seiner Mitte sich befindet, liegt auf zwei Unterlagen bei A und B (Fig. 24.) schief gegen den Horizont und macht mit letzterem den Winkel α; — in C, während AC $= c$ ist, wirkt eine Last L vertikal nach unten. In A ist noch ein Widerlager, damit der Balken nicht herunter gleiten könne. Man soll die Drucke bestimmen, welche die mit dem Horizont unter dem Winkel α abgeschrägte Unterlage bei B, desgleichen die bei A von der Unter- und Wider-Lage gebildete scharfe Kante

erleidet, vorausgesetzt daß der Balken bei A ebenfalls mit einer scharfen Kante anliegt.

Der Druck bei A, der Größe und Richtung nach unbekannt, wird in zwei unbekannte Drucke, N senkrecht auf die schiefe Fläche der Unterlage, und S in der Richtung BA, zerlegt gedacht. Der Druck R bei B ist (nach §. 26.) senkrecht auf die schiefe Fläche der Unterlage. Diese Drucke N, S und R, alle drei in der genau entgegengesetzten Richtung gedacht (nämlich als Drucke der Unterlagen und der Widerlage gegen den Balken) in Verbindung mit den Kräften P und L halten nun den Balken im Gleichgewicht (nach §. 26.), wenn man noch (nach §. 27.) die Reibung μN bei A, und $\mu' R$ bei B, beide in der Richtung AB gedacht, in Rechnung bringt. Die drei Bedingungen des Gleichgewichts §. 24. Nr. 1. geben dasmal, wenn man die Kräfte wiederum horizontal und vertikal zerlegt, und wenn man dasmal A zum Centrum der Momente nimmt,

1) $-N \cdot \sin\alpha + S \cdot \cos\alpha - R \cdot \sin\alpha + \mu N \cdot \cos\alpha + \mu' R \cdot \cos\alpha = 0,$

2) $N \cdot \cos\alpha + S \cdot \sin\alpha + R \cdot \cos\alpha + \mu N \cdot \sin\alpha + \mu' R \cdot \sin\alpha - P - L = 0,$

3) $P \times \tfrac{1}{2} l \cdot \cos\alpha + L \times c \cdot \cos\alpha - R \cdot l = 0.$

Die letztere Gleichung giebt augenblicklich

$$R = \left(\tfrac{1}{2}P + \frac{c}{l}L\right) \cdot \cos\alpha;$$

die beiden anderen Gleichungen geben dann

$$N = \left(\tfrac{1}{2}P + \frac{l-c}{l}L\right) \cdot \cos\alpha$$

und

$$S = (P+L) \cdot \sin\alpha - \tfrac{1}{2}(\mu+\mu')P \cdot \cos\alpha - \frac{\mu(l-c)+\mu' c}{l} L \cdot \cos\alpha.$$

Setzt man nachgehends N und S (nach unten senkrecht auf den Balken und links hin in der Richtung des Balkens gedacht) in eine einzige Kraft zusammen, so hat man Größe und Richtung des Druckes an der scharfen Kante bei A.

Man hätte hier besser gethan, wenn man die Kräfte, statt sie auf den Horizont und auf die Vertikale zu projiciren, auf die Richtung AB des Balkens und auf die darauf senkrechte Richtung projicirt hätte. — Da endlich die Wahl des Centrums der statischen Momente frei steht, so muß man immer so wählen, daß die (Momenten-) Gleichung so wenig wie möglich Unbekannte erhalte.

§. 31.

Ein Balken AB (Fig. 25.) vom Gewicht P und von der

Länge l, dessen Schwer-Punkt in seiner Mitte ist, liegt bei A auf einer horizontalen Unterlage und stemmt sich eben daselbst gegen ein vertikales Widerlager, mit dem andern Ende B aber gegen eine vertikale Mauer, so daß er mit dem Horizont den Winkel α macht. In C, während AC = c ist, ist er noch vertikal nach unten mit dem Gewichte L belastet. Man soll die Drucke bestimmen, welche er bei B gegen die Mauer, bei A aber senkrecht gegen das Unterlager und auch senkrecht gegen das Widerlager ausübt.

Es sey R der Druck gegen die Mauer, N der Druck gegen die Unterlage bei A, und S der Druck gegen das Widerlager bei A, so halten diese 3 Drucke, wenn man sich jeden in der entgegengesetzten Richtung d. h. als Druck der umgebenden Massen gegen den Balken denkt, nebst den beiden Gewichten P und L, und den Reibungen (μN bei A nach E hin wirkend, und μ'S bei A, so wie μ''R bei B nach oben wirkend) den Balken im Gleichgewicht (nach §. 26. und §. 27.) Man hat daher (nach §. 24. Nr. 1.), wenn man die Kräfte horizontal und vertikal projicirt, und auch den Punkt A zum Centrum der Momente nimmt, die 3 Gleichungen des Gleichgewichts:

1) $S+\mu N-R=0$,

2) $\mu' S+N-P-L+\mu'' R=0$,

3) $P\times\frac{1}{2}l\cdot\cos\alpha+L\cdot c\cdot\cos\alpha-R\times l\cdot\sin\alpha-\mu'' R\times l\cdot\cos\alpha=0$.

Die dritte Gleichung giebt sogleich

$$R=\frac{\left(\frac{1}{2}P+\frac{c}{l}L\right)\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha+\mu''\cdot\cos\alpha}$$

Die beiden ersteren Gleichungen geben dann, wenn man diesen Werth von R in sie statt R substituirt sich denkt,

$$N=\frac{P+L-(\mu'+\mu'')R}{1-\mu\mu'}$$

$$S=\frac{(1+\mu\mu'')R-\mu(P+L)}{1-\mu\mu'}.$$

Je kleiner α wird, desto größer werden die Seiten-Drucke R und S, so daß sie zuletzt alle Größe übersteigen *). — Fallen alle Reibungen weg,

---

*) Durch eine solche Vorrichtung könnte man daher eine unendlich große Kraft erzeugen, wenn nicht die Materie in der Wirklichkeit nachgäbe. Immer aber kann auch in der Wirklichkeit ein bedeutender Seiten-Druck erzeugt werden.

so ist N = P + L, d. h. die Unterlage bei A hat das ganze Gewicht zu tragen.

§. 32.

Ganz ähnliche Rechnungen finden statt, wenn man zwei solche Balken sich einander entgegenstemmend voraussetzt, wie Fig. 26., weil dann der zweite Balken das leistet, was jetzt die Mauer, und weil jeder Balken für sich in's Gleichgewicht gestellt werden muß (nach §. 26.). — Weil aber jeder der beiden Balken, da wo sie zusammenstoßen, auch einen vertikalen Druck ausüben kann, so ist das Gleichgewicht hier, wie die Rechnung zeigt (mit Ausnahmen), nur dann möglich, wenn sie beide mit einander verklammert oder verzapft sind, wo denn die Klammer oder der Zapfen diesen vertikalen Druck, der nach unten und nach oben (dem §. 26. gemäß) wieder gleich groß seyn muß, aushält.

§. 33.

Eine Thür ABCD (Fig. 27.), welche die Form eines Rechtecks hat, deren Schwer-Punkt in ihrer Mitte sich befindet und welche das Gewicht P hat, hängt an zweien Stellen E und F in genau vertikal unter einander befestigten Angeln. Man soll den Druck bestimmen, den diese Angeln auszuhalten haben, der Größe und der Richtung nach.

Die (Gegen-) Drucke S, R, S_1 und R_1 in Verbindung mit dem Gewicht P halten die Thüre im Gleichgewicht (nach §. 26.). Daher hat man die 3 Gleichungen (nach §. 24. Nr. 1.)

$$1)\quad S_1 - S = 0,$$

$$2)\quad R + R_1 - P = 0,$$

und, — wenn man den Punkt F zum Centrum der Momente nimmt,

$$3)\quad P \times AG = S \times FE.$$

Diese 3 Gleichungen geben nun

$$S_1 = S = \frac{AG}{FE} \cdot P \text{ und } R + R_1 = P.$$

Der Seiten-Druck S (den die obere Angel nach der Rechten zu erleidet) und der Seiten-Druck S_1 (den die untere Angel nach der Linken zu erleidet), sind also desto kleiner, je entfernter die beiden Angeln E und F von einander abstehen. Ferner haben

die beiden Angeln E und F nach unten das ganze Gewicht P der Thüre zu tragen. Wie viel aber jede Einzelne nach unten gedrückt wird, bleibt unentschieden und hängt in der Wirklichkeit von der Nachgiebigkeit der Materie ab, so daß man wissen müßte, wie letztere in Rechnung gebracht werden kann, wenn man noch eine vierte Gleichung haben wollte, welche auch diese Unbestimmtheit in der Rechnung noch hebt.

§. 34.

Die schiefe Ebene.

Auf einer mit dem Horizont AC (Fig. 28.) den Winkel BAC $= \alpha$ bildenden absolut festen d. h. unbeweglichen Ebene, liegt ein Körper, dessen Schwer-Punkt S und dessen Gewicht P ist. An einem Punkte E (in derselben Ebene der Figur) wirkt eine Kraft Q, deren Richtung mit dem Horizont den Winkel β macht und welche die Last P im Gleichgewicht erhalten soll. Man soll die Größe von Q bestimmen

1) wenn augenblicklich eine Bewegung nach unten erfolgen soll, sobald Q um das geringste kleiner wird; — und dann soll man noch einmal Q bestimmen
2) wenn augenblicklich eine Bewegung nach oben erfolgen soll, sobald Q um das geringste größer wird.

Ansatz der Aufgabe. Im Gleichgewicht findet von Seiten des Körpers P gegen die schiefe Ebene BA (nach §. 26.) ein auf sie senkrechter unbekannter Druck R statt an einer unbekannten Stelle D, so daß AD $=$ x gesucht werden kann. Dadurch entsteht also die Reibung $\mu \cdot R$, der beabsichtigten Bewegung entgegen, folglich in dem Falle 1., den wir auch zuerst lösen wollen, von D nach B hin. Man hat also die 4 Kräfte P, Q, R (in der Richtung DF d. h. den (Gegen-) Druck der schiefen Ebene gegen den Körper nach §. 26.) und μR in der Richtung DB, welche den Körper im Gleichgewicht halten. Man erhält daher (nach §. 24. Nr. I.) drei Bedingungen des Gleichgewichts, nämlich einmal die Summe der horizontalen Projektionen der 4 Kräfte der Null gleich, d. h.

$$1)\quad -R \cdot \sin\alpha + \mu R \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta = 0;$$

dann die Summe der vertikalen Projektionen derselben 4 Kräfte der Null gleich, d. h.

$$2)\quad -P + R \cdot \cos\alpha + \mu R \cdot \sin\alpha + Q \cdot \sin\beta = 0;$$

endlich drittens die Summe der statischen Momente aller 4 Kräfte in Bezug auf ein beliebiges Centrum (A z. B.) der Null gleich, d. h.

$$3)\quad P\cdot AK - R\cdot x + Q\cdot cos\beta \times AL - Q\cdot sin\beta \times AI = 0\ ^{*)}.$$

Und da in dem Falle 2. unserer Aufgabe die Reibung in der entgegengesetzten Richtung DA in Rechnung gebracht werden muß, so bilden dieselben drei Gleichungen auch den Ansatz der zweiten Aufgabe, sobald man die Glieder der Gleichung, welche die Reibung μR enthalten, mit dem entgegengesetzten Zeichen nimmt, oder wenn man, was auf dasselbe herauskommt, überall $-\mu$ statt μ schreibt.

Auflösung der Gleichungen. Aus den Gleichungen 1. und 2. berechnen sich die Kraft Q und der Druck R unmittelbar. — Man erhält nämlich:

$$\text{I.}\qquad R = \frac{P\cdot cos\beta}{cos(\alpha-\beta)+\mu\cdot sin(\alpha-\beta)},$$

$$\text{II.}\qquad Q = \frac{P\cdot(sin\,\alpha-\mu\cdot cos\,\alpha)}{cos(\alpha-\beta)+\mu\cdot sin(\alpha-\beta)}\ ^{**)};$$

und diese Resultate bestimmen den Druck R und die Kraft Q auch für den Fall 2. der Aufgabe, sobald überall $-\mu$ statt μ gesetzt wird.

Die Gleichung 3. giebt AD oder x, d. h. die Stelle D des Druckes ohne Weiteres.

Anmerkung 1. Für $\beta=\alpha$ wird $R=P\cdot cos\,\alpha$ und

---

*) Weil das statische Moment der Kraft Q in Bezug auf das Centrum A nicht so bequem zu bestimmen ist, so ist hier dafür die Summe der statischen Momente ihrer beiden Seiten-Kräfte $Q\cdot cos\beta$ und $Q\cdot sin\beta$ gesetzt worden, die Momente in Bezug auf dasselbe Centrum A genommen.

**) Will man nach dieser Formel II. die Kraft Q in Ziffern wirklich berechnen, so sucht man erst einen Hülfswinkel φ aus der Gleichung

$$1)\qquad tg\varphi = \mu,$$

und dann Q aus der Gleichung

$$2)\qquad Q = \frac{P\cdot sin(\alpha-\varphi)}{cos(\alpha-\beta-\varphi)},$$

in welche sich die II. dann umformt. — Auf diese Weise werden bequeme logarithmische Rechnungen möglich.

Und für die Anfgabe im zweiten Fall, wo die Last P gehoben werden soll, berechnet sich dann Q aus der Gleichung

$$3)\qquad Q = \frac{P\cdot sin(\alpha+\varphi)}{cos(\alpha-\beta+\varphi)}.$$

$Q = P \cdot (sin\,\alpha - \mu \cdot cos\,\alpha)$; und wenn man auch keine Reibung beachtet, so wird $Q = P \cdot sin\,\alpha = P \cdot \frac{BC}{AB}$.

Anmerkung 2. Denkt man sich in dem Falle 1. der Aufgabe, $Q = 0$, d. h. soll die Reibung allein mit P gerade noch Gleichgewicht halten, so fallen aus unseren 3 Gleichungen die mit Q behafteten Glieder heraus. Die erste giebt dann

1) $$\mu = tg\,\alpha,$$

während die andere den Druck

2) $$R = \frac{P}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

dazu liefert. Die dritte Gleichung giebt wiederum die Stelle des Drucks.

Die Gleichung 1. giebt nun den Winkel α, wenn μ bekannt ist; sie giebt aber umgekehrt den Reibungs-Koefficienten μ, wenn α (aus Versuchen) bekannt seyn sollte. — Auf diese letztere Weise kann man die obige Tafel (§. 27.) für den Werth des Reibungs-Koefficienten, versuchsweise bestimmen *).

§. 35.

Der Keil.

Auf einer horizontalen Unterlage LL (Fig. 29.) liegen zwei gleiche und das Gewicht P habende parallelepipedalisch geformte Klötze EGKI lose auf. Zwischen beiden liegt ein Keil, dessen Rücken AA horizontal und Länge BC vertikal steht, und dessen Seiten AC (an C) den Winkel 2α machen, so daß BCA $= \alpha$ ist. In der Richtung BC wirkt eine Gesammt-Kraft auf den Keil (das Gewicht desselben mit einbegriffen), welche durch Q bezeichnet seyn mag. Wie groß muß Q seyn, damit die Reibung an E und D gerade überwunden, aber doch noch Gleich-

*) Bei dieser Aufgabe der schiefen Ebene ist der Einfluß der Reibung in der Regel sehr bedeutend. Ist P ein Gewicht von 8 Centnern, $\alpha = 30^0$, $\beta = 20^0$, so erhält man für die Kraft Q in dem ersten Fall der Aufgabe ohngefähr $1\frac{1}{2}$ Ctr., in dem andern Fall dagegen über 7 Ctr., wenn jedesmal der Reibungs-Koefficient $\mu = \frac{1}{3}$ gesetzt wird.

gewicht ist, dergestalt, daß sogleich ein Wegschieben der Klötze erfolgt, sobald die Kraft Q um noch so wenig vergrößert wird.

Ansatz der Aufgabe. Dasmal besteht das lose System aus 3 beweglichen Theilen, deren jeder für sich (nach §. 26.) im Gleichgewicht seyn muß. Der Keil AAC ist im Gleichgewicht, vermöge der Kraft Q, der beiden unbekannten Drucke R, welche die Klötze senkrecht auf seine Seiten in den Richtungen von H nach F auf ihn ausüben, endlich der beiden Reibungen μR an E, in der Richtung von E nach A hin. — Die drei Bedingungen des Gleichgewichts (§. 24. Nr. 1.) geben aber dasmal, wenn man die Kräfte horizontal und vertikal projicirt, und zuletzt C als Centrum der Momente nimmt, die erste und dritte Gleichung identisch $0 = 0$, und die zweite wird

1) $$Q - 2R \cdot \sin\alpha - 2\mu R \cdot \cos\alpha = 0.$$

Aus den drei Bedingungen des Gleichgewichts des einen der Klötze gehen aber noch drei Gleichungen hervor. Auf den Klotz wirken nämlich die Kräfte: P im Schwer-Punkt S angebracht, der Druck R vom Keil in der Richtung von H nach E, die Reibung μR an E in der Richtung von E nach C, dann der unbekannte vertikale, von unten nach oben gehende (Gegen-) Druck N, von der horizontalen Unterlage auf den Klotz (welcher letztere auf die Unterlage denselben Druck N von oben nach unten ausübt) an einer unbekannten Stelle D; — endlich die Reibung μ'N an D in der Richtung von D nach O. Diese 5 Kräfte müssen nun einander das Gleichgewicht halten. Dies giebt, wenn man die Kräfte horizontal und vertikal projicirt und zuletzt G als Centrum der Momente nimmt, die drei Gleichungen

2) $$R \cdot \cos\alpha - \mu R \cdot \sin\alpha - \mu' N = 0;$$

3) $$-P - R \cdot \sin\alpha - \mu R \cdot \cos\alpha + N = 0;$$

4) $$P \times GU + R \cdot \cos\alpha \times GE - \mu R \cdot \sin\alpha \times GE - N \times GD = 0.$$

Der andere Klotz giebt dieselben drei Gleichungen des Gleichgewichts, weshalb sie hier überflüssig werden.

Auflösung der Gleichungen. Die Gleichung 4. giebt GD d. h. die Stelle des Druckes N. — Die Gleichungen 1. — 3. geben dagegen die Kraft Q und die beiden Drucke R und N. — Man erhält durch ihre Auflösung

$$R = \frac{\mu' P}{(1 - \mu\mu')\cos\alpha - (\mu + \mu')\sin\alpha};$$

$$N = \frac{(\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha) P}{(1 - \mu\mu')\cos\alpha - (\mu + \mu')\sin\alpha};$$

$$Q = \frac{2\mu'(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) P}{(1 - \mu\mu')\cos\alpha - (\mu + \mu')\sin\alpha}.$$

Anmerkung. Denkt man sich beide Klötze unten zusammengewachsen, so daß der Keil zum Spalten derselben verwandt werden soll, so bleibt bloß die Gleichung 1. allein übrig; und sie dient dann dazu, um, wenn Q bekannt ist, den Druck R zu bestimmen, mit welchem die elastischen Fasern des zu spaltenden Gegenstandes auf den Keil zurückwirken.

Der Anfänger mag endlich auch noch versuchen, dasselbe Problem zu lösen, wenn die Unterlage der Klötze von G an sich unter einen Winkel β gegen den Horizont erhebt. Setzt man dann in den Resultaten $\beta = 0$, so müssen die vorstehenden Resultate sich wieder ergeben. (S. Lehrb. d. Mechanik Th. II. §. 113 ff.)

§. 36.

Vom Hebel.

Ein Körper von beliebiger Form (Fig. 30.), dessen Gewicht G und dessen Schwer-Punkt S seyn mag, ist um einen unbeweglichen Zapfen, dessen Mittel-Punkt C und Halbmesser CA $= \varrho$ ist, beweglich, so daß er sich um diesen Zapfen herum drehen kann. Ein solcher Körper wird ein Hebel genannt; der Zapfen oder vielmehr der Punkt C, um welchen die Drehung erfolgen kann, heißt die Unterlage (das Hypomochlion, der Dreh-Punkt).

An diesem Hebel wirken in derselben Ebene mit dem Gewichte G eine Last W in einer Richtung, welche mit dem Horizont CX den Winkel α macht, und eine Kraft Q in einer Richtung, welche mit dem Horizont CX den Winkel $180^0 - \beta$ macht. Man soll die Größe der Kraft Q finden, welche mit der Last W das Gleichgewicht hält, aber einmal

1) unter der Voraussetzung, daß die Kraft Q die Reibung bereits mit überwunden hat, so daß, wenn Q um das geringste vergrößert wird, sogleich eine Drehung in ihrem Sinne erfolgt; und dann noch einmal

2) unter der Voraussetzung, daß die Last W herunter gelassen werden soll und die Reibung bereits überwunden hat, das Gleichgewicht also zwar noch statt findet, aber so, daß wenn Q

um

um das Geringste verkleinert wird, sogleich eine Bewegung im Sinne der Last W wirklich erfolgt.

Ansatz der Aufgabe. Der Hebel wird im Gleichgewicht erhalten durch die Kräfte G, W, Q und noch durch den unbekannten (Gegen-) Druck N des Zapfens gegen den Hebel (der dem Drucke gleich und genau entgegen ist, welchen der Hebel im Gleichgewicht gegen den Zapfen ausübt) senkrecht auf die Oberfläche des Zapfens also in der Richtung eines Halbmessers CA gedacht, welcher mit dem Horizont CX den unbekannten Winkel $ACX = 180^0 + \varphi$ bildet, indem man den unbekannten Winkel ICX $=$ ECA, den die Richtung des Hebel-Drucks gegen den Zapfen, mit dem Horizonte CX bildet, durch φ bezeichnet; — endlich noch durch die Reibung μN, welche in dem ersten Fall unserer Aufgabe in der Richtung der Tangente von A nach F wirkt, so daß sie mit dem Horizont CX den Winkel $270^0 + \varphi$ macht, — welche dagegen in dem zweiten Fall unserer Aufgabe in der entgegengesetzten Richtung wirkt, so daß sie mit dem Horizont CX den Winkel $90^0 + \varphi$ macht. — Lösen wir aber zuerst den ersten Fall unserer Aufgabe.

Der Satz §. 24. Nr. 1. giebt zwischen den Kräften W, G, Q, N und μN, — wenn man die horizontalen und vertikalen Projektionen der Kräfte nimmt, und zuletzt den Punkt C zum Centrum der Momente, — diese drei Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich:

1) $W \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta - N \cdot \cos\varphi + \mu N \cdot \sin\varphi = 0$

2) $G + W \cdot \sin\alpha + Q \cdot \sin\beta - N \cdot \sin\varphi - \mu N \cdot \cos\varphi = 0$

3) $-G \cdot g + W \cdot w - Q \cdot q + \mu N \cdot \varrho = 0,$

wenn CE, CD und CB senkrecht auf die Richtungen der Kräfte G, W und Q gedacht und diese Längen bezüglich durch g, w und q bezeichnet werden.

Setzt man aber in diesen Gleichungen durchaus $-\mu$ statt μ, so hat man zu gleicher Zeit den Ansatz der andern, in 2. ausgesprochenen Aufgabe.

Auflösung der Gleichungen. Eliminirt man aus 1. und 2. abwechselnd $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, so erhält man, wenn aus den beiden neuen Gleichungen N elimirt wird, sofort

$$tg\varphi = \frac{G + W \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) + Q \cdot (\sin\beta + \mu \cdot \cos\beta)}{\mu G + W \cdot (\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha) - Q \cdot (\cos\beta - \mu \cdot \sin\beta)},$$

woraus denn $\sin\varphi \left(= \frac{tg\varphi}{\sqrt{1 + tg\varphi^2}}\right)$ und $\cos\varphi \left(= \frac{1}{\sqrt{1 + tg\varphi^2}}\right)$ und N sofort in W, G, Q, α und β ausgedrückt gefunden werden. Dieser Werth von N in die 3. substituirt giebt dann, wenn letztere nach Q geordnet wird, und wenn man $\frac{\mu^2}{1+\mu^2} = \nu^2$

setzt (so daß $\nu < \mu$ wird),

$$4)\ (q^2-\nu^2\varrho^2)\cdot Q^2-2\{(Ww-Gg)q+\nu^2\varrho^2[-W\cdot cos(\alpha+\beta)+G\cdot sin\beta]\}\cdot Q + (Ww-Gg)^2-\nu^2\varrho^2(W^2+G^2+2GW\cdot sin\alpha) = 0\ ^{*)};$$

und da diese Gleichung sich nicht ändert, wenn $-\mu$ statt μ gesetzt wird, so enthält sie auch die Auflösung des zweiten Falles unserer Aufgabe, so daß der größere der aus dieser quadratischen Gleichung sich ergebenden Werthe von Q den ersten Fall unserer Aufgabe löst, der kleinere dagegen für den zweiten Fall gilt.

Bei dem Hebel (also auch bei dem „Rad an der Welle", bei den Rollen, Rollenzügen und Flaschenzügen) ist übrigens der Unterschied der beiden Werthe von Q (für beide Fälle der Aufgabe, d. h. wenn Q einmal die Reibung gegen sich, das andere Mal für sich hat) bei weitem nicht so bedeutend, wie bei der schiefen Ebene, weil die von der Reibung abhängige Zahl $\nu(<\mu)$ allemal noch mit der ebenfalls kleinen Zahl ϱ multiplicirt erscheint **), und weil noch überdieß, wie die Tabelle des §. 27. sehen läßt, bei der Zapfen-Reibung der Koefficient μ an sich schon viel kleiner ist.

Anmerkung 1. Wählt man die Form des Hebels so daß $q=0$ wird, und bringt man anfänglich eine kleine Last W an, die nach und nach größer gemacht wird, endlich so groß, daß die Reibung allein gerade noch ausreicht, um diese Last W im Gleichgewicht zu erhalten, so hat man $Q=0$, und die Gleichung 4. des §. 36. giebt nun, wenn man noch $\alpha=90^0$ genommen hat,

$$\nu = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{w\cdot W}{\varrho\cdot(W+G)},$$

---

*) Schafft man in den Gleichungen 1. und 2. die mit N behafteten Glieder auf die andere Seite, quadrirt und addirt man diese Gleichungen, so ergiebt sich augenblicklich

$$(W\cdot cos\,\alpha - Q\cdot cos\,\beta)^2+(G+W\cdot sin\,\alpha+Q\cdot sin\,\beta)^2 = (1+\mu^2)\cdot N^2.$$

Diese Gleichung giebt den Druck N in G, W und Q ausgedrückt. Substituirt man in diese Gleichung den Werth von N, wie er sich aus der Gleichung 3. ergiebt, so hat man augenblicklich die Gleichung 4., ohne daß es nöthig ist, vorher φ in G, W und Q auszudrücken.

**) Der Anfänger muß übrigens nicht unbemerkt lassen, daß bei dem Bilden der Gleichung 3. (auch hier beim Hebel, wie überall) das Centrum der Momente ganz beliebig gewählt werden kann, und daß man also statt des Punktes C, jeden anderen Punkt in der Ebene hätte dazu auswählen können.

aus welcher Gleichung sich dann μ berechnet, da W, G, w und ϱ bekannt sind. Auf diese und ähnliche Weise kann der Reibungs-Koefficient μ für Zapfen-Reibung, so wie er in der Tabelle des §. 27. zu finden ist, berechnet werden.

Anmerkung 2. Läßt man nicht bloß die Reibung, sondern auch das Gewicht des Hebels außer Acht, so hat man das, was man den mathematischen Hebel nennt. In ihm ist daher, in so fern die dritte Gleichung jetzt

$$Q \cdot q = W \cdot w$$

liefert, das statische Moment der Kraft dem statischen Moment der Last gleich, sobald das Hypomochlion C zum Centrum der Momente genommen wird.

Die Form des Hebels ist wie immer, so auch bei dem mathematischen Hebel ganz gleichgültig. Man unterscheidet aber noch

a) den geradlinigen Hebel, und zwar den zweiarmigen oder Hebel der ersten Art (Fig. 31.) und den einarmigen oder den der zweiten Art (Fig. 32.). Wirken an diesem Hebel die Kraft Q und die Last W vertikal, so verhält sich (im Gleichgewicht), eben weil $Q \cdot q = W \cdot w$ ist, die Kraft Q zur Last W, wie umgekehrt die Längen CK und CH, welche letzteren bei dem geradlinigen Hebel die Hebel-Arme genannt werden;

b) den Winkel-Hebel (Fig. 33.), wo CK und CH die Arme desselben genannt werden. Es ist, wenn Kraft Q und Last W mit einander parallel gedacht werden, und wenn die Arme CK und CH mit der auf die Richtungen von Q und W senkrecht gedachten AB bezüglich die Winkel φ und ψ machen, im Falle des Gleichgewichts offenbar

$$Q \cdot CK \cdot \cos\varphi = W \cdot CH \cdot \cos\psi.$$

Diese Unterscheidungen nebst den Benennungen veralten jedoch immer mehr, weil es bei dem Gleichgewicht am Hebel weniger auf die Form des Hebels, als vielmehr auf die statischen Momente der Kräfte, die auf ihn wirken, ankommt, für das Hypomochlion als Centrum der Momente genommen, so daß die Arme q, w der **Momente** weit wichtiger sind als die Arme des **Hebels**.

Daß auch am mathematischen Hebel beliebig viel Kräfte wirken können, und daß er im Gleichgewicht ist, so oft die Summe der statischen Momente aller Kräfte, in Bezug auf das Hypomochlion als Centrum der Momente genommen und gehörig positiv oder negativ in Rechnung gebracht, der Null gleich ist, — versteht sich von selbst.

Uebrigens wirken als Hebel die Scheeren, die Hebebäume, Brechstan-

gen, die Krämer- und die Schnell-Wage, und unzählige im bürgerlichen Leben und in der Technik vorkommende Maschinen und Instrumente.

§. 37.

Vom Rad an der Welle.

Die Theorie und das Resultat für den Hebel im §. 36. gilt auch für das „Rad an der Welle", von welchem Fig. 34. ein Querschnitt zu sehen ist, wo am Rade die Kraft Q, an der Welle dagegen die Last W wirkt, wenn man nur unter q den Halbmesser des Rades bis zur Mitte des Seils, und unter w den Halbmesser der Welle versteht, ebenfalls bis in die Mitte des Seils gerechnet, während ϱ den Halbmesser der beiden Zapfen der Welle vorstellt, welche in ihren Zapfenlagern gehen. — Genau wahr ist diese Behauptung jedoch nicht, weil Last und Kraft nicht in einer und derselben Ebene wirken, die Behandlung dieses Problems also eigentlich erst aus den Lehren des folgenden Kapitels geschöpft werden kann (Vgl. Lehrbuch d. Mechanik, Th. II. S. 299.).

Läßt man aber das Resultat des vorstehenden §. 36. für das „Rad an der Welle" gelten, so ist doch $g = 0$ zu setzen, weil jetzt der Schwer-Punkt der Maschine als mit dem Dreh-Punkt C zusammenfallend angesehen werden kann.

Und läßt man die Reibung außer Acht, so giebt die Gleichung 3. des §. 36. sogleich

$$W \cdot w = Q \cdot q, \quad \text{also} \quad Q = \frac{w}{q} \cdot W.$$

Wir heben hier namentlich zwei besondere Fälle hervor, welche in den Anwendungen am häufigsten vorkommen, und in welchen auch zugleich die Rechnungen viel einfacher werden.

I. Betrachtung des Falles, wo die Kraft Q und die Last W (wie Gewichte) vertikal nach unten wirken, wo also $\beta = \alpha = 90^\circ$ ist.

In diesem Falle werden die drei Gleichungen des Gleichgewichts die nachstehenden:

1) $$-N \cdot \cos\varphi + \mu N \cdot \sin\varphi = 0,$$

also $$\cot g\,\varphi = \mu;$$

2) $$G + W + Q - N \cdot \sin\varphi - \mu N \cdot \cos\varphi = 0,$$

also $$N = \frac{G + W + Q}{\sqrt{1 + \mu^2}};$$

3) $$W \cdot w - Q \cdot q + \mu N \cdot \varrho = 0,$$

also, wenn $\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$ durch ν bezeichnet wird,

$$Q = \frac{w + \nu\varrho}{q - \nu\varrho} \cdot W + \frac{\nu\varrho}{q - \nu\varrho} \cdot G,$$

oder, wenn man diesen Ausdruck nach dem sehr kleinen $\frac{\nu\varrho}{q}$ in eine Reihe entwickelt, und die zweiten und höheren Potenzen von $\frac{\nu\varrho}{q}$ außer Acht läßt,

$$Q = \frac{w}{q} \cdot W + \frac{\nu\varrho}{q} \cdot \left[G + \left(1 + \frac{w}{q}\right) W\right]$$

oder, wenn man die ächten Brüche

$$\frac{w}{q} = k \quad \text{und} \quad \frac{\varrho}{q} = \varepsilon$$

setzt,

$$Q = k \cdot W + \nu\varepsilon \cdot [G + (1 + k) W],$$

wo der zweite mit ν afficirte Theil dem Einfluß der Reibung zuzuschreiben ist.

Und setzt man hier überall $-\mu$ statt μ, also $-\nu$ statt ν, so hat man auch die Auflösung des zweiten Falles unserer Aufgabe, wo die Reibung von der Last W bereits überwunden seyn soll.

II. Betrachtung des Falles, wo die Last W vertikal nach unten, die Kraft Q aber horizontal wirkt, wo also $\alpha = 90°$, $\beta = 0$ ist.

In diesem Falle werden die drei Gleichungen des Gleichgewichts jetzt so:

1) $$-Q - N \cdot \cos\varphi + \mu N \cdot \sin\varphi = 0,$$

2) $$G + W - N \cdot \sin\varphi - \mu N \cdot \cos\varphi = 0,$$

3) $$W \cdot w - Q \cdot q + \mu N \cdot \varrho = 0;$$

und man erhält hieraus

$$tg\,\varphi = \frac{G + W + \mu Q}{\mu G + \mu W - Q},$$

$$N = \sqrt{\frac{Q^2 + (G + W)^2}{1 + \mu^2}},$$

$$Q = \frac{k \cdot W + \nu\varepsilon \cdot \sqrt{(W + G)^2 (1 - \nu^2\varepsilon^2) + \varepsilon^2 \cdot W^2}}{1 - \nu^2\varepsilon^2},$$

oder, näherungsweise, wenn man nach dem sehr kleinen $\nu\varepsilon$ in Reihen entwickelt und die zweiten und höheren Potenzen von $\nu\varepsilon$ außer Acht läßt,

$$Q = k\, W + \nu\varepsilon \cdot \sqrt{(W + G)^2 + \varepsilon^2 W^2}.$$

Dies ist der Werth von Q, wenn Q bereits die Reibung überwunden haben soll. Setzt man aber $-\mu$ statt μ, also $-\nu$ statt ν, so hat man zugleich auch den Werth von Q für die andere Aufgabe, wo die Reibung von der Last W bereits überwunden seyn soll.

Anmerkung 1. Der Erfahrung gemäß muß man aber in den Anwendungen wegen der Steifigkeit der Seile, in dem Falle, wo die Last W überwunden werden soll, wo also v positiv ist, die Last W etwas größer in die Rechnung nehmen als sie ist, und zwar muß man statt W überall

$$W' = \left(1 + \tfrac{1}{300}\frac{\delta^2}{w}\right) \cdot W\ ^{*)}$$

setzen, wenn w in preußischen oder rheinländischen Zollen ausgedrückt ist, δ aber die Dicke des Seils in preußischen Linien vorstellt.

In dem andern Falle unserer Aufgabe aber, wo W herabgelassen, also die Kraft Q überwunden werden soll, und wo also statt v eine negative Zahl in die Rechnung gesetzt wird, muß W gelassen werden wie es ist, dagegen muß dann in die Rechnung statt Q überall $Q' = \left(1 + \tfrac{1}{300} \cdot \frac{\delta^2}{q}\right) \cdot Q$ gesetzt werden, wegen der Steifigkeit der Seile, die jetzt der Last W zu Gute kommt, wobei q wiederum in rheinl. Zollen, δ in rheinl. Linien ausgedrückt seyn muß.

Anmerkung 2. Wird das „Rad an der Welle" nicht als Haspel gebraucht, sondern als Winde oder Göpel (wo die Welle vertikal steht), so ist in den Gleichungen des §. 36. nicht bloß g, sondern auch $G = 0$ zu setzen. Dagegen bekommt die Gleichung 3. dann noch ein Glied, welches von der Reibung $\mu' G$ des kreisrund gedachten Zapfen-Endes auf der horizontalen Unterlage herrührt, während G das Gewicht der Maschine vorstellt. Ist ϱ der Halbmesser des Zapfens, so findet sich mittelst der Integral-Rechnung das statische Moment dieser Reibung, welches noch der Gleichung 3. des §. 36. hinzugefügt werden muß, $= \frac{2}{3}\varrho \cdot \mu' G$, also gerade so, wie wenn die Gesammt-Reibung $\mu' G$ in einem Punkte concentrirt wäre, der um $\frac{2}{3}\varrho$ vom Mittelpunkt abliegt.

---

*) Die Versuche geben $\frac{12}{3500}$ statt $\frac{1}{300}$. Mit letzterer Zahl ist bequemer zu rechnen und der Unterschied ist hier nicht zu achten.

§. 38.

Die feste Rolle.

Dieselben Gleichungen 1. — 3. des §. 36. und dieselben Resultate, die wir daselbst für den Hebel gefunden haben, gelten auch noch für die feste Rolle (Fig. 35.), bei welcher der Zapfen, um welchen die Rolle läuft, und der den Halbmesser ϱ hat, in der Gabel fest sitzend und Zapfen nebst Gabel unbeweglich gedacht werden. Man muß nur daselbst $q = w = r$ setzen, wenn r den Halbmesser der Rolle bedeutet bis zur Mitte des Seils gerechnet. Eben so ist, wie bei dem „Rade an der Welle" $g = 0$ zu nehmen.

Die drei Gleichungen des Gleichgewichts sind daher jetzt für die feste Rolle

$$1)\quad W\cdot\cos\alpha - Q\cdot\cos\beta - N\cdot\cos\varphi + \mu N\cdot\sin\varphi = 0,$$

$$2)\quad G + W\cdot\sin\alpha + Q\cdot\sin\beta - N\cdot\sin\varphi - \mu N\cdot\cos\varphi = 0,$$

$$3)\quad (W-Q)r + \mu N\varrho = 0,$$

woraus hervorgeht, wenn $\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \nu$ gesetzt wird,

$$4)\quad (r^2-\nu^2\varrho^2)\cdot Q^2 - 2\left\{Wr^2+\nu^2\varrho^2[-W\cdot\cos(\alpha+\beta)+G\cdot\sin\beta]\right\}Q$$
$$+W^2r^2-\nu^2\varrho^2\cdot(W^2+G^2+2GW\cdot\sin\alpha) = 0,$$

wo W die Last, Q die Kraft, G das Gewicht der bloßen Rolle (ohne Gabel) vorstellt, während r der Halbmesser der Rolle bis zur Mitte des Seils, ϱ der Halbmesser des Zapfens und $\nu < \mu$ ist. Der größere der hieraus für Q sich ergebenden beiden Werthe löst die Aufgabe für den Fall, daß die Last W überwunden werden soll, daß also Q bereits die Reibung überwunden hat, während der kleinere Werth von Q die andere Aufgabe löst, bei welcher die Kraft Q überwunden werden soll, und die Reibung von der Last W bereits überwunden ist.

Hat man aber Q gefunden, so erhält man noch den Druck N der Welle gegen den Zapfen und den Winkel φ, welcher die Stelle dieses Druckes bestimmt.

§. 39.

Die feste Rolle in ihrem einfachsten Falle.

Der einfachste Fall ist der, wo Q und W vertikal herunter hängen, wo also $\beta = \alpha = 90^0$ ist. — Die Gleichungen des Gleichgewichts werden dann

$$1) \qquad -N \cdot \cos\varphi + \mu N \cdot \sin\varphi = 0,$$

also

$$\cot g\,\varphi = \mu;$$

$$2) \quad G + W + Q - N \cdot \sin\varphi - \mu N \cdot \cos\varphi = 0,$$

also

$$N = \frac{G+W+Q}{\sqrt{1+\mu^2}};$$

und

$$3) \qquad (W - Q) \cdot r + \mu N \cdot \varrho = 0;$$

also

$$4) \qquad Q = \frac{r+\nu\varrho}{r-\nu\varrho} \cdot W + \frac{\nu\varrho}{r-\nu\varrho} \cdot G;$$

wo $-\nu$ statt ν gesetzt werden muß, wenn die Reibung von der Last W überwunden werden soll.

Läßt man das Gewicht G der Rolle außer Acht, was fast immer geschehen kann, so wird noch einfacher

$$5) \qquad Q = \frac{r+\nu\varrho}{r-\nu\varrho} \cdot W.$$

Setzt man $\frac{\varrho}{r} = \varepsilon$ und entwickelt man den vorstehenden Ausdruck für Q nach Potenzen des sehr kleinen $\nu\varepsilon$, so erhält man näherungsweise

$$6) \qquad Q = (1 + 2\nu\varepsilon) \cdot W,$$

wo statt ν auch μ selbst genommen werden kann.

Anmerkung. Wegen der Steifigkeit der Seile muß aber, wenn μ, also auch ν positiv genommen wird (nach Anmerk. 1. zu §. 37.),

$$Q = (1 + 2\nu\varepsilon)\left(1 + \tfrac{1}{300}\frac{\delta^2}{r}\right) W$$

d. h. näherungsweise

$$7) \qquad Q = \left(1 + 2\nu\varepsilon + \tfrac{1}{300}\frac{\delta^2}{r}\right) \cdot W$$

genommen werden, wo r in rheinl. Zollen dagegen δ (die Dicke des Seils) in rheinl. Linien ausgedrückt seyn muß.

In dem andern Falle der Aufgabe, wo die Kraft Q von der Last W überwunden werden soll, müssen in derselben Formel 7. die beiden von der Reibung und von der Steifigkeit der Seile herrührenden Glieder mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen, also beide subtrahirt werden, wenn man die Kraft Q haben will, welche zwar noch mit Hülfe der Reibung und mit Hülfe der Steifigkeit der Seile die Last W im Gleichgewicht erhält,

aber augenblicklich die Last W sinken läßt, so oft Q selbst um noch so wenig kleiner genommen wird.

Denkt man sich ein Seil von 10 Linien Dicke, und den Halbmesser r des Rades = 5 Zoll, so wie den Halbmesser ϱ des Zapfens = $\frac{1}{2}$ Zoll, endlich $\nu = \frac{1}{10}$, so ist $2\nu\varrho = \frac{1}{50}$, dagegen $\frac{1}{300}\,\frac{\delta^2}{r} = \frac{1}{15}$; und man sieht daher, wie die Steifigkeit der Seile ein bei weitem bedeutenderes Hinderniß des Hebens der Last W mittelst der Rolle werden kann, als es die Reibung ist. — Nimmt man übrigens Seile, die nur halb so dick sind, so ist der von der Steifigkeit derselben herrührende Einfluß nur den vierten Theil so groß.

§. 40.

Die lose Rolle.

Die lose Rolle (Fig. 36.) ist ein Hebel, dessen Zapfen selbst wieder beweglich ist, so daß außer den drei Gleichungen des Gleichgewichts für den Hebel, auch noch drei Gleichungen des Gleichgewichts für den Zapfen hinzugefügt werden müssen, weil nach §. 26. ein loses System nicht im Gleichgewicht seyn kann, wenn nicht jeder der losen Theile desselben für sich im Gleichgewicht steht.

Es sey (Fig. 36.) W das Gesammt-Gewicht der Gabel und der daran gehängten Last, und S der Schwer-Punkt dieses vereinigten Ganzen, in welchem also das Gewicht W vertikal nach unten, d. h. parallel mit der vertikalen Axe OY, angreift. Der Halbmesser der Rolle bis zur Mitte des Seils gerechnet, sey = r, so wie ihr Gewicht (ohne Gabel) = G; der Halbmesser des Zapfens sey = ϱ. Das über die Rolle gespannte Seil ist in F an einem unbeweglichen Körper befestigt, und solches mache mit dem Horizonte OX den Winkel $180^\circ + \beta$, während die Kraft Q mit dem Horizont OX den Winkel $360^\circ - \alpha$ machen soll. In A finde der unbekannte Druck N der Rolle gegen den Zapfen in der Richtung AD, und des Zapfens gegen die Rolle in der Richtung AE statt, und es werde W·EOX durch φ bezeichnet. Die Last W soll durch die Kraft Q in die Höhe gefördert werden, so daß dem Bewegen der Rolle die Rei-

bung μN in der Richtung AC entgegenwirkt, diese Reibung μN also mit OX den Winkel $90^0 + \varphi$ macht. Der Bewegung des Zapfens dagegen ist in demselben Falle entgegen die Reibung μN in der Richtung AB, welche letztere mit dem Horizont OX den Winkel $270^0 + \varphi$ macht. Denkt man sich das Seil bei F durchschnitten, so ist eine Kraft S nöthig, um das Gleichgewicht zu erhalten, und diese (unbekannte) Kraft S heißt die Spannung des Seils. Man soll, wenn W gegeben ist, S und Q finden, so aber, daß zwar noch Gleichgewicht ist, aber eine Bewegung der Last W nach oben augenblicklich erfolgt, sobald Q um das geringste größer genommen wird.

Da die Rolle im Gleichgewicht erhalten wird mittelst der Kräfte G, S, Q, N und μN, welche mit dem Horizonte OX bezüglich die Winkel 90^0, $180^0 + \beta$, $360^0 - \alpha$, φ und $90^0 + \varphi$ machen, so hat man nach §. 24. Nr. 1. die drei Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich:

1) $$-S \cdot \cos\beta + Q \cdot \cos\alpha + N \cdot \cos\varphi - \mu N \cdot \sin\varphi = 0,$$

2) $$G - S \cdot \sin\beta - Q \cdot \sin\alpha + N \cdot \sin\varphi + \mu N \cdot \cos\varphi = 0,$$

3) $$S \cdot r - Q \cdot r + \mu N \cdot \varrho = 0.$$

Und weil der Zapfen (nebst Gabel) durch die Kräfte W, N und μN im Gleichgewicht erhalten wird, welche mit dem Horizonte OX bezüglich die Winkel 90^0, $180^0 + \varphi$ und $270^0 + \varphi$ machen, so hat man noch die anderen drei Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich

4) $$-N \cdot \cos\varphi + \mu N \cdot \sin\varphi = 0,$$

5) $$W - N \cdot \sin\varphi - \mu N \cdot \cos\varphi = 0,$$

6) $$\mu N \cdot \varrho - W \cdot w = 0,$$

wenn die horizontale Entfernung SH des Schwer-Punkts S, an welchem die Last W wirkt, von der vertikalen OY, durch w bezeichnet wird.

Bezeichnet man OS durch a, so wie W·SOX durch ψ, so giebt diese Gleichung 6. jetzt $\mu N \cdot \varrho = W \cdot a \cdot \cos\psi$, und dies giebt, wenn vorher mittelst der übrigen Gleichungen N gefunden ist, den Winkel $90^0 - \psi$, um welchen die Gabel vermöge der Reibung, von der vertikalen Richtung OY abgelenkt wird, während die Rolle im verlangten Gleichgewicht steht.

Die Gleichung 4. giebt sogleich

7) $$\cotg\varphi = \mu;$$

und aus der Gleichung 5. erhält man dann

8) $$N = \frac{W}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Es wird also der Druck N etwas kleiner als die Last W, und zwar vermöge der Reibung. — Dieser Werth von N giebt noch $cos\,\psi = \nu \frac{\varrho}{a}$, wenn $\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \nu$ gesetzt wird.

Addirt man aber die Gleichungen 1. und 4., desgleichen 2. und 5., so eliminiren sich N und φ ganz weg, und man erhält

$$9)\qquad -S\cdot cos\,\beta + Q\cdot cos\,\alpha = 0,$$

$$10)\qquad S\cdot sin\,\beta + Q\cdot sin\,\alpha = W + G,$$

während die Gleichung 3. übergeht in

$$11)\qquad -S\cdot r + Q\cdot r = \nu\varrho W.$$

Da diese drei Gleichungen nur die beiden unbekannten S und Q enthalten, so liefern sie noch eine Abhängigkeit zwischen α und β, die erfüllt seyn muß, wenn das Gleichgewicht der losen Rolle soll bestehen können. Eliminirt man aber S und Q aus 9. — 11., so ergiebt sich

$$12)\qquad \nu\varrho\cdot W\cdot sin(\alpha+\beta) = r\cdot(W+G)\cdot(cos\,\beta - cos\,\alpha)$$

oder $\nu\varrho\cdot W\cdot cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = r\cdot(W+G)\cdot sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

eine Gleichung, woraus

$$13)\qquad tg\tfrac{1}{2}\beta = \frac{r\cdot(W+G)\cdot sin\tfrac{1}{2}\alpha - \nu\varrho W\cdot cos\tfrac{1}{2}\alpha}{r\cdot(W+G)\cdot cos\tfrac{1}{2}\alpha - \nu\varrho W\cdot sin\tfrac{1}{2}\alpha}$$

hervorgeht. Hat man aber hieraus zu dem gegebenen Winkel α den Winkel β gefunden, so geben dieselben Gleichungen noch

$$14)\quad S = \frac{\nu\varrho W\cdot cos\,\alpha}{r(cos\,\beta - cos\,\alpha)} \quad \text{und} \quad 15)\quad Q = \frac{\nu\varrho W\cdot cos\,\beta}{r(cos\,\beta - cos\,\alpha)}.$$

§. 41.

Die lose Rolle in ihrem einfachsten Fall.

Denkt man sich beide Seil-Enden vertikal nach oben gehend, also $\beta = \alpha = 90^0$, so wird die 9. identisch und die 10. und 11. geben nun

$$Q + S = W + G,$$

$$Q - S = \nu\varepsilon\cdot W, \text{ wenn } \frac{\varrho}{r} = \varepsilon$$

gesetzt wird, woraus

16) $S = \frac{1}{2}(1 - \nu\varepsilon) \cdot W + \frac{1}{2}G,$

17) $Q = \frac{1}{2}(1 + \nu\varepsilon) \cdot W + \frac{1}{2}G$

hervorgeht, während N und φ und ψ die in 8. und 7. bereits gefundenen Werthe behalten. Dabei bedeutet G das Gewicht der bloßen Rolle (ohne Gabel) und W das Gesammt-Gewicht der Last und der Gabel, an welcher sie hängt.

Anmerkung 1. Läßt man das Gewicht der Rolle außer Acht, so wird für die gegenwärtige Aufgabe

1) $Q = \frac{1}{2}(1 + \nu\varepsilon)W,$ 2) $S = \frac{1}{2}(1 - \nu\varepsilon)W,$

und daher auch

3) $$Q = \frac{r + \nu\varrho}{r - \nu\varrho} \cdot S,$$

oder näherungsweise

4) $$Q = (1 + 2\nu\varepsilon) \cdot S,$$

genau wie bei der festen Rolle, wenn S als Last, Q als Kraft angesehen wird. Und berücksichtigt man auch die Reibung nicht, so wird

$$Q = \frac{1}{2}W = S.$$

Anmerkung 2. Wird endlich überall im §. 40. und §. 41. $-\mu$ statt μ, also $-\nu$ statt ν gesetzt, so hat man den Ansatz und die Lösung der anderen Aufgabe, wo die Last W herabgelassen werden, und bereits, obwohl das Gleichgewicht noch besteht, die Reibung überwunden haben soll.

Anmerkung 3. Wegen der Steifigkeit der Seile muß man aber in allen Resultaten, wo die Kraft Q bereits die Reibung überwunden haben soll, also in allen vorhergehenden Gleichungen wo μ, folglich auch ν positiv genommen wird, noch $\left(1 + \frac{1}{300}\frac{\delta^2}{r}\right) \cdot W$ statt W setzen. — Dies giebt, im Fall das Gewicht der Rolle außer Acht gelassen wird, näherungsweise

1) $$Q = \frac{1}{2}\left(1 + \nu\varepsilon + \frac{1}{300}\frac{\delta^2}{r}\right) \cdot W,$$

2) $$S = \frac{1}{2}(1 - \nu\varepsilon) \cdot W,$$

3) $$Q = \left(1 + 2\nu\varepsilon + \frac{1}{300}\frac{\delta^2}{r}\right) \cdot S,$$

wo δ die Dicke des Seils in rheinl. Linien, r dagegen in rheinl. Zollen ausgedrückt seyn muß.

Sollte aber die Last W heruntergelassen werden, und Q und S für diesen Fall des Gleichgewichts, wo die Last W bereits die Steifigkeit der Seile und die Reibung überwunden haben soll, gefunden werden, so muß man in diesen 3 Formeln die von der Steifigkeit der Seile und von der Reibung herrührenden Glieder mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen nehmen.

Ueberall ist endlich, besonders aber in diesen Näherungs-Formeln μ statt ν zu setzen, weil

$$\nu = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \mu - \tfrac{1}{2}\mu^3 + \cdots$$

ist, man also nicht um $\frac{1}{2}\mu^3$ fehlt, während μ, wie aus der Tafel §. 27. zu ersehen ist, bei Zapfen-Reibung immer klein ist. Endlich hat man bei den Näherungs-Formeln alle Glieder mit der zweiten Potenz von $\nu\varepsilon$, so wie mit dem Produkt aus $\nu\varepsilon$ und $\frac{1}{300}\frac{\delta^2}{r}$ außer Acht gelassen; indem man also μ statt ν setzt, bringt man von diesem Weggelassenen wieder etwas ein, so daß wenigstens die Annäherung dadurch nicht noch mehr fehlerhaft wird.

§. 42.

Der Rollenzug.

Eine Vorrichtung, wie sie die Fig. 37. zu sehen giebt, heißt ein Rollenzug. Derselbe kann beliebig viele lose Rollen haben, während jedesmal oben noch eine Hand-Rolle angebracht ist, welche fest gedacht wird. Will man in ihm die Gleichung zwischen der Kraft P und der Last W finden, unter der Voraussetzung, daß P alle Reibungen bereits überwunden haben soll, so bezeichne man die unbekannten Spannungen der Seile FH, NI, KO durch Q, Q′, Q″, und man hat (wenn man die Gewichte der Rollen außer Acht läßt, und die Halbmesser aller Rollen einander gleich und, bis zur Mitte des Seils gerechnet, gleich r, — desgleichen die Halbmesser aller Zapfen einander und

gleich ϱ sich denkt) nach §. 41., wenn $\frac{\varrho}{r} = \varepsilon$ und $\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \nu$ gesetzt wird,

$$Q = \tfrac{1}{2}(1+\nu\varepsilon)\cdot W,$$
$$Q' = \tfrac{1}{2}(1+\nu\varepsilon)\cdot Q,$$
$$Q'' = \tfrac{1}{2}(1+\nu\varepsilon)\cdot Q';$$

also auch

1) $$Q'' = \frac{1}{2^3}\cdot(1+\nu\varepsilon)^3\cdot W.$$

Außerdem aber hat man, es mag die Rolle OM eine lose oder eine feste Rolle seyn, nach §. 39. Nr. 5., oder §. 41. Nr. 3.,

2) $$P = \frac{r+\nu\varrho}{r-\nu\varrho}\cdot Q'' = \frac{1+\nu\varepsilon}{1-\nu\varepsilon}\cdot Q'',$$

so daß wird:

3) $$P = \frac{1}{2^3}\frac{(1+\nu\varepsilon)^4}{1-\nu\varepsilon}\cdot W;$$

oder, — wenn man diesen Ausdruck nach $\nu\varepsilon$ in eine Reihe entwickelt und die zweiten und höheren Potenzen von $\nu\varepsilon$ außer Acht läßt, — näherungsweise

4) $$P = \frac{1}{2^3}(1+5\nu\varepsilon)\cdot W.$$

Hätte aber der Rollenzug, außer der obersten (Hand-) Rolle, n lose Rollen, so würde man finden

5) $$P = \frac{1}{2^n}\frac{(1+\nu\varepsilon)^{n+1}}{1-\nu\varepsilon}\cdot W = \frac{1}{2^n}\frac{1+\nu\varepsilon}{1-\nu\varepsilon}(1+\nu\varepsilon)^n\cdot W,$$

oder näherungsweise, wenn n nicht 4 übersteigt,

6) $$P = \frac{1}{2^n}[1+(n+2)\nu\varepsilon]\cdot W.$$

Soll die Steifigkeit der Seile in Rechnung gebracht werden, so findet man

7) $$P = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{(1\pm\nu\varepsilon)^{n+1}}{1\mp\nu\varepsilon}\left(1+\frac{1}{300}\frac{\delta^2}{r}\right)^{\pm(n+1)}\cdot W,$$

oder näherungsweise, wenn n bloß 2, 3 oder 4 ist,

8) $$P = \frac{1}{2^n}\left[1\pm(n+2)\nu\varepsilon\pm\frac{(n+1)}{300}\frac{\delta^2}{r}\right]\cdot W,$$

sobald δ die Dicke des Seils in rheinl. Linien, r dagegen den Halbmesser der Rolle in rheinl. Zollen ausdrückt, und wo alle oberen (+) Zeichen genommen werden müssen, wenn P die Reibungen alle mit überwunden haben soll, wo dagegen alle unteren (—) Zeichen genommen werden, wenn man die Last W herablassen will und die Reibungen alle von ihr überwunden seyn sollen.

Und soll endlich weder die Steifigkeit der Seile noch die Reibung berücksichtigt werden, so hat man

$$P = \frac{1}{2^n} \cdot W;$$

immer unter der Voraussetzung, daß der Rollenzug aus n losen Rollen besteht.

§. 43.

Der Flaschenzug.

Eine Vorrichtung, wie sie eine der Figg. 38., 39., 40. oder 41. vorzeigt, heißt ein Flaschenzug.

Soll für den Fall der Fig. 38. die Gleichung zwischen der Last W und der Kraft P unter der Voraussetzung gefunden werden, daß P bereits alle Reibungen überwunden hat, und r und ϱ die Halbmesser der kleineren Rollen und ihrer Zapfen, desgleichen r' und ϱ' dieselben an den größeren Rollen (r und r' jedesmal bis in die Mitte des Seils gemessen) vorstellen, — so muß man wie folgt verfahren.

Im Gleichgewicht erleidet jede der unteren, losen Rollen einen Druck an einer unbekannten Stelle. Dieser Druck, bezüglich N und N', wird in der entgegengesetzten Richtung gedacht, so daß seine Richtung mit der horizontalen Axe OX bezüglich den Winkel ψ und ψ' bildet; außerdem werden noch die Reibungen μN und $\mu N'$ angebracht. Bezeichnet man nun noch die Spannungen der Seile, wie sie in der Fig. 38. zu sehen sind, durch T, T', T'' und T''', so muß jede der 4 Rollen für sich im Gleichgewicht seyn, und die untere Flasche (ohne die Rollen) ebenfalls für sich im Gleichgewicht stehen. Man bekommt dadurch eine Anzahl von Bedingungs-Gleichungen für das Gleichgewicht einer jeden Rolle, aus denen nach und nach N, N', T', T'', T''' ꝛc. ψ, ψ', ꝛc. eliminirt werden können, so daß man dann die gesuchte End-Gleichung zwischen der Kraft P und der Last W erhält (Vgl. „Lehrb. d. Mech." Th. II. §. 104.).

Wir wollen hier kürzer zum Ziele kommen, dadurch daß wir die Last

W, d. h. das Gewicht der unteren Flasche mit allem was daran gehängt ist, in zwei Theile W′ und W″ zertheilt uns denken, von denen die oberste der unteren Rollen W′, die unterste dagegen W″ zu heben hat, so daß

1) $$W'+W''=W$$

wird. Nehmen wir dann die Halbmesser der Bolzen (Zapfen) und der Rollen alle einander gleich und bezüglich $=\varrho$ und $=r$, und bezeichnet man noch die Quotienten

$$\frac{\varrho}{r} \text{ durch } \varepsilon, \quad \text{und} \quad \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \text{ durch } \nu,$$

so hat man nach den kurz vorher für die lose und feste Rolle erhaltenen Resultaten

2) $$T' = \tfrac{1}{2}(1+\nu\varepsilon)\cdot W';$$ 3) $$T'' = \frac{1+\nu\varepsilon}{1-\nu\varepsilon}\cdot T';$$

4) $$T''' = \tfrac{1}{2}(1+\nu\varepsilon)\cdot W'';$$ 5) $$T''' = \frac{1+\nu\varepsilon}{1-\nu\varepsilon}\cdot T'';$$

und 6) $$P = \frac{1+\nu\varepsilon}{1-\nu\varepsilon}\cdot T'''.$$

Eliminirt man hieraus W′, W″, T′, T″ und T‴, so erhält man

$$W' = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(1-\nu\varepsilon)^2}{1+\nu^2\varepsilon^2}\cdot W, \qquad W'' = \tfrac{1}{2}\frac{(1+\nu\varepsilon)^2}{1+\nu^2\varepsilon^2}\cdot W$$

und

7) $$P = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{(1+\nu\varepsilon)^4}{(1-\nu\varepsilon)(1+\nu^2\varepsilon^2)}\cdot W.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Potenzen des sehr kleinen $\nu\varepsilon$, so erhält man näherungsweise

8) $$P = \tfrac{1}{4}\cdot(1+5\nu\varepsilon)\cdot W$$

für 2 Paare Rollen.

Für n Paare Rollen, wenn n nicht 4 übersteigt, erhält man auf diese Weise annähernd

9) $$P = \frac{1}{2n}\cdot[1+(2n+1)\nu\varepsilon]\cdot W.$$

Und berücksichtigt man noch die Steifigkeit der Seile, so erhält man annähernd

10) $$P = \frac{1}{2n}\cdot\left[1 \pm (2n+1)\nu\varepsilon \pm \frac{2n}{300}\cdot\frac{\delta^2}{r}\right]\cdot W,$$

wenn n die Zahl 4 nicht übersteigt, und wenn δ die Dicke des Seils in rheinl. Linien, dagegen r den Halbmesser der Rollen in rheinl. Zollen ausdrückt, wobei alle oberen (+) Zeichen gelten, wenn P die Last W nebst allen Reibungen überwinden soll, alle unteren (—) dagegen, wenn alle Reibungen von der Last W überwunden seyn sollen.

Und berücksichtigt man weder die Steifigkeit der Seile noch die Reibung, so geht diese Gleichung über in

$$P = \frac{1}{2n}\cdot W;$$

d. h.

d. h. die Kraft ist dann der durch die Anzahl der Seile oder durch die Anzahl der Rollen dividirten Last gleich.

Anmerkung. In allen diesen Rechnungen, also bei dem Hebel, bei dem „Rad an der Welle", den Rollen, so wie bei den Rollenzügen und Flaschenzügen, kann statt der durch ν vorgestellten Zahl allemal μ selbst geschrieben werden, besonders in den Näherungsformeln.

Sechstes Kapitel.

Von beliebigen Kräften, welche, ohne mit ihren Richtungen in einer und derselben Ebene zu liegen, einen festen Körper gleichzeitig angreifen.

§. 44.

Fortsetzung der Theorie der Gegen-Paare *).

Im §. 22. haben wir gelernt 1) daß für jedes Gegen-Paar ein ganz beliebiges anderes gesetzt werden kann, sobald es nur in derselben Ebene liegt und dasselbe Moment und dieselbe (Dreh-) Richtung hat; 2) wie zwei und mehr Gegen-Paare in einer und derselben Ebene, in ein einziges Gegen-Paar vereinigt werden können, welches in derselben Ebene liegt, es mögen jene eine und dieselbe, oder verschiedene (Dreh-) Richtungen haben. — Jetzt müssen wir zunächst zwei Gegen-Paare betrachten, die in verschiedenen Ebenen liegen, und sehen, wie sich solche in ein einziges vereinigen lassen, und zwar a) wenn beide Ebenen unter sich parallel sind, und b) wenn beide Ebenen sich schneiden.

1) Jedes beliebige Gegen-Paar P, P (Fig. 42.), welches den Arm $AB = p$ hat, kann man im Körper parallel mit sich fortrücken, ohne daß die Wirkung desselben auf den Körper eine Aenderung erleidet, so lange nur die Ebene EDCF des neuen Gegen-Paares mit der Ebene GABH des gegebenen parallel ist, und beide Gegen-Paare ein und dasselbe Moment $P \cdot p$ und dieselbe (Dreh-) Richtung haben.

*) S. Kap. IV. §. 22.

Denn denkt man sich durch alle 4 parallelen Kräfte P eine Ebene ABCD gelegt, senkrecht auf die Richtungen der Kräfte, und ist der Arm CD des neuen Gegen-Paares dem Arm AB des alten gleich, so ist die Figur ABCD ein Parallelogramm, dessen beide Diagonalen sich in ihrer Mitte K schneiden. Denkt man sich nun beide Kräfte im neuen Gegen-Paar in genau entgegengesetzter Richtung genommen, so vereinigen sich die beiden parallelen Kräfte an A und D (nach unten) in eine Kraft 2P in K (nach unten); die beiden Kräfte an B und C (nach oben) dagegen vereinigen sich in die Kraft 2P in K (nach oben); und da sich letztere beiden vernichten, so vernichten sich alle 4 Kräfte in ABCD. — Folglich leistet das neue Gegen-Paar dasselbe, was das alte.

2) Sollen daher beliebig viel Gegen-Paare in beliebigen parallelen Ebenen in ein einziges Gegen-Paar vereinigt werden, wenn sie sich nicht im Gleichgewicht halten, so denkt man sich alle parallel mit sich nach einer und derselben parallelen Ebene fortgerückt und allda nach §. 22. vereinigt, wenn man nicht findet, daß sie sich allda im Gleichgewicht halten.

3) Greifen zwei Gegen-Paare, deren Momente N und L sind, den Körper gleichzeitig an, liegen sie aber in Ebenen YOZ und YOX (Fig. 43.), welche sich (in einer Geraden OY) schneiden, so nimmt man, um sie beide in ein einziges Gegen-Paar zu vereinigen, auf der Durchschnitts-Linie OY einen Punkt A, von O um die Längen-Einheit entfernt; trägt auf OX, eine Länge $OC = L$, so wie parallel damit $AB = L$, so bilden die beiden Kräfte OC und AB das Gegen-Paar, dessen Moment $= L \cdot 1 = L$ ist (Vgl. §. 22. Nr. 6.). Eben so mögen $OE = N$ und $AD = N$ das Gegen-Paar vorstellen, dessen Moment $= N$ ist. — Vereinigt man dann sowohl in O, als auch in A die beiden Kräfte L und N nach dem Kräften-Parallelogramm in die einzige Kraft R, so hat man das mittlere Gegen-Paar R, R, dessen Moment $= R \cdot 1 = R$ ist, und welches in der Ebene FAOG liegt. — Denkt man sich durch A oder O drei Gerade auf die Ebenen L, L, ferner N, N und R, R senkrecht, so sind letztere die Axen dieser Gegen-Paare und bilden unter sich genau dieselben Winkel, welche die Ebenen der Gegen-Paare selbst unter sich bilden.

Trägt man also die Momente L und N, statt wie Fig. 43.,

lieber auf den Axen dieser Gegen-Paare als Längen ab, zeichnet man dann das Parallelogramm aus, und zieht man die Diagonale, so ist solche der Länge nach das Moment des gesuchten mittleren Gegen-Paares, und der Richtung nach die Axe desselben, so daß das mittlere Gegen-Paar selbst in einer auf dieser Diagonale senkrechten Ebene liegt. Da aber jede Senkrechte auf einer Ebene, von der Ebene ab gerechnet, zwei Richtungen oder zwei Seiten hat, so muß man zu Seiten des Parallelogramms die beiden gleichnamigen Seiten der Axen nehmen (so nämlich, daß wenn man diese Richtungen und die Ebenen selbst zusammenfallen läßt, die beiden Gegen-Paare L und N in einem und demselben Sinne drehen würden); dann ist die Diagonale des Parallelogramms ebenfalls eine gleichnamige Axen-Seite, so daß durch diesen Umstand auch die (Dreh-) Richtung des mittleren Gegen-Paares bekannt ist. — Dieser Satz heißt aber der „Satz vom Parallelogramm der Gegen-Paare".

4) Stehen die beiden Ebenen YOZ und YOX auf einander senkrecht, stehen also auch ihre gleichnamigen Axen-Seiten auf einander senkrecht, so ist das Parallelogramm ein Rechteck, und es macht dann die gleichnamige Axen-Seite des mittleren Gegen-Paares R, mit den gleichnamigen Axen-Seiten der Seiten-Gegen-Paare L und N, Winkel φ und ψ, welche durch die Gleichungen

$$\text{I. } R\cdot\cos\varphi = L \quad \text{und} \quad \text{II. } R\cdot\cos\psi = N$$

gegeben sind, woraus denn auch noch

$$\text{III. } R^2 = L^2 + N^2$$

hervorgeht.

5) Es seyen OX, OY, OZ (Fig. 44.) drei auf einander senkrechte (Koordinaten-) Axen, und zugleich die gleichnamigen Axen-Seiten der in den Ebenen YOZ, ZOX und XOY liegenden Gegen-Paare, so daß dadurch die (Dreh-) Richtung dieser letzteren bezüglich von Z nach Y, von X nach Z und von Y nach X hin (jedesmal durch den rechten Winkel hindurch) für die positive, die entgegengesetzte dann für die negative erklärt wird. In jeder dieser Ebenen YOZ, ZOX und XOY

liege ein Gegen-Paar, deren Momente bezüglich durch N, M, L ausgedrückt seyn mögen, während jedoch diese Buchstaben L, M, N positive oder negative Zahlen vorstellen sollen, je nachdem die (Dreh-) Richtung der Gegen-Paare in diesen Koordinaten-Ebenen die für positiv erklärte oder die entgegengesetzte ist. Auch soll unter L, M oder N die Null verstanden werden, so oft eines dieser Gegen-Paare ganz fehlt. Endlich verstehe man unter positiver Axen-Seite eines Gegen-Paares in einer beliebigen vierten Ebene W, die ebenfalls durch den Punkt O gedacht seyn mag, diejenige, welche man mit OZ (oder OY oder OX) zusammenfallen lassen muß, damit nicht bloß die Ebene W mit der Ebene XOY (oder XOZ, oder YOZ) zusammenfällt, sondern auch die (Dreh-) Richtung dieses vierten Gegen-Paares mit der für positiv erklärten (Dreh-) Richtung in diesen Koordinaten-Ebenen übereinstimmt.

Unter allen diesen Voraussetzungen vereinigen sich die drei (Seiten-) Gegen-Paare L, M, N in ein einziges (mittleres) Gegen-Paar, dessen Ebene W und Axe KOK' durch den Punkt O gehend gedacht werden können; und zwar bestimmen sich die Lage der Ebene W desselben, seine (Dreh-) Richtung in dieser Ebene, und dessen Moment Π_0 aus folgenden drei Gleichungen, nämlich

I. $\Pi_0 \cdot \cos\lambda_0 = L$; II. $\Pi_0 \cdot \cos\mu_0 = M$;

und III. $\Pi_0 \cdot \cos\nu_0 = N$,

sobald λ_0, μ_0, ν_0 die Winkel sind, welche die positive Seite der Axe KOK' bezüglich mit den drei positiven Seiten OZ, OY und OX der Koordinaten-Axen macht (oder auch die Winkel, welche die Ebene W bezüglich mit den Koordinaten-Ebenen YOX, XOZ und ZOY bildet, während jedoch diese letztere Rede-Weise die (Dreh-) Richtung des mittleren Gegen-Paares nicht hervorhebt). Dabei wird Π_0 immer positiv (oder vielmehr absolut) gedacht, wie jedes Moment.

Diese Gleichungen I. — III. geben noch

IV. $$\Pi_0 = +\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

Es folgt dies alles sogleich aus dem Vorhergehenden, indem man zuerst zwei der Gegen-Paare in eins vereinigt, und dann dieses wieder mit dem dritten verbindet. — Man s. noch das „Lehrb. d. Mechanik" Th. II. Kap. II.

§. 45.

Vereinigung und Gleichgewicht von beliebig viel Gegen-Paaren im Raume.

A. Denkt man sich in n verschiedenen Ebenen, welche alle durch den Punkt O gehen können, n verschiedene Gegen-Paare, deren Momente bezüglich Π_1, Π_2, Π_3, $\cdots \Pi_n$ sind und deren positive Axen-Seiten mit den Koordinaten-Axen OZ, OY und OX bezüglich die Winkel λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2; λ_3, μ_3, ν_3; $\cdots \lambda_n, \mu_n, \nu_n$ machen, so kann man jedes dieser Gegen-Paare z. B. Π_2 in drei Seiten-Gegen-Paare zerlegen, deren Momente bezüglich

$$\Pi_2 \cdot \cos\lambda_2, \quad \Pi_2 \cdot \cos\mu_2, \quad \Pi_2 \cdot \cos\nu_2$$

sind, welche bezüglich in den Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ und YOZ liegen, und deren Richtungen durch die positiven oder negativen Werthe dieser Produkte gegeben sind.

Berechnet man daher

$$\text{a)}\ \Sigma(\Pi \cdot \cos\lambda) = L; \qquad \text{b)}\ \Sigma(\Pi \cdot \cos\mu) = M$$

und

$$\text{c)}\ \Sigma(\Pi \cdot \cos\nu) = N,$$

so sind (nach §. 22. Nr. 9.) L, M, N die Momente der Gegen-Paare in den Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ und YOZ, in welche sich alle gegebenen Gegen-Paare Π_1, Π_2, $\Pi_3 \cdots \Pi_n$ vereinigen. Und nun geben die Gleichungen

$$\text{I.}\ \Pi_0 \cdot \cos\lambda_0 = L; \qquad \text{II.}\ \Pi_0 \cdot \cos\mu_0 = M;$$

$$\text{III.}\ \Pi_0 \cdot \cos\nu_0 = N; \qquad \text{IV.}\ \Pi_0 = +\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

das einzige mittlere Gegen-Paar, seinem Momente Π_0 nach, seiner Axe, also auch der Lage seiner Ebene nach, so wie noch seiner (Dreh-) Richtung nach, in so fern λ_0, μ_0, ν_0 die Winkel vorstellen, welche seine positive Axen-Seite bezüglich mit OZ, OY und OX macht.

B. Ist gleichzeitig

$$\text{I.}\ L = 0; \qquad \text{II.}\ M = 0 \quad \text{und} \quad \text{III.}\ N = 0,$$

so halten sich alle n gegebenen Gegen-Paare im Gleichgewicht, und diese drei Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts sind eben so nothwendig als sie ausreichen *).

§. 46.

Vereinigung und Gleichgewicht von beliebig viel Kräften im Raume.

1) Denkt man sich eine Kraft P, welche einen Körper beliebig wo und in einer beliebigen Richtung angreift, so kann man solche parallel mit sich fortgerückt und einen anderen ganz beliebigen Punkt O angreifend denken, wenn man den Körper nur noch gleichzeitig durch ein Gegen-Paar angreifen läßt, dessen Ebene und (Dreh-) Richtung durch die Richtung der Kraft P und den Punkt O gegeben sind, und dessen Moment dem statischen Moment P·p der Kraft P in Bezug auf den Punkt O als Centrum (in derselben Ebene genommen) gleich ist (genau nach §. 23. Nr. 3.); wobei p die senkrechte Entfernung des Punktes O von der Richtung der Kraft P bedeutet.

2) Denkt man sich dann durch den Punkt O drei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen OX, OY und OZ gelegt; denkt man sich ferner die Kraft P durch die Länge AB vorgestellt (ohne Figur), und auf die Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ und YOZ projicirt, so daß A_1B_1, A_2B_2 und A_3B_3 diese Projektionen sind; denkt man sich noch die Richtung der Kraft P oder AB von A nach B, und die Projektionen A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 als Kräfte, deren Richtungen von A_1 nach B_1, von A_2 nach B_2, von A_3 nach B_3 zu gehen, und denkt man sich in diesen Koordinaten-Ebenen, von den Kräften A_1B_1, A_2B_2 und A_3B_3

*) Da man die Koordinaten-Axen ganz beliebig legen kann, so bekommt man im Falle des Gleichgewichts der Gegen-Paare, unendlich viele solcher Gleichungen. Wenn nun von diesen irgend drei erfüllt sind, wenn also die Summe der Projektionen der (als Rechtecke gedachten) Momente der Gegen-Paare Π_1, Π_2, Π_3, ꝛc. auf drei ganz beliebige Ebenen, welche unter sich ganz beliebige Winkel machen, jede für sich jedesmal der Null gleich ist, so halten sich die Gegen-Paare Π_1, Π_2, Π_3, ꝛc. im Gleichgewicht. (Vergl. Anmerk. 1. zu §. 4., so wie die Note zu §. 11. Nr. 2.)

die statischen Momente genommen in Bezug auf den Punkt O als Centrum, und positiv oder negativ, je nachdem die Kräfte A_1B_1, A_2B_2 oder A_3B_3 um O in den als positiv angenommenen (Dreh-) Richtungen drehen würden oder in den entgegengesetzten, — so sind diese letzteren statischen Momente der Größe und dem (+ oder —) Zeichen nach die Momente und die (Dreh-) Richtungen der drei Seiten-Gegen-Paare, in welche sich das nach Nr. 1. noch hinzugetretene Gegen-Paar nach §. 44. Nr. 5. zerlegen läßt.

Man kann sich nämlich das Moment $P \cdot p$ des in der Ebene OAB hinzugetretenen Gegen-Paares als den doppelten Inhalt des Dreiecks OAB denken, und die drei anderen statischen Momente als die doppelten Inhalte der Dreiecke OA_1B_2, OA_2B_2, OA_3B_3, während in der Geometrie bewiesen ist, daß die letzteren Inhalte gefunden werden, wenn man den ersten Inhalt OAB auf jede der drei Koordinaten-Ebenen projicirt, d. h. mit den Kosinussen der Winkel, welche die Ebene OAB mit diesen letzteren drei Ebenen macht, multiplicirt. Diese letzteren Produkte, doppelt genommen, sind aber nach §. 44. Nr. 5. die Momente der gedachten Seiten-Gegen-Paare, nur daß statt des Winkels der Ebenen, der Winkel der auf diesen Ebenen senkrechten Momenten-Axen gesetzt wird, und zwar der Winkel, den die positiven Axen-Seiten mit einander machen, so daß die Kosinusse zwar der Größe nach dieselben bleiben, aber nach der (Dreh-) Richtung des Gegen-Paares bald das +, bald das —Zeichen vor sich bekommen, und zwar genau dieselben Vorzeichen, welche die vorstehende Behauptung angiebt.

3) Greifen daher n beliebige Kräfte P_1, P_2, $P_3 \cdots P_n$ einen Körper gleichzeitig an beliebigen Punkten A_1, A_2, $A_3 \cdots A_n$ in beliebigen Richtungen an, — so kann man genau wie im §. 23. Nr. 4. verfahren, und alle Kräfte parallel mit sich nach einem beliebig gewählten (Versammlungs-) Punkt O fortrücken und daselbst gleichzeitig angreifen lassen, wenn man nur den Körper gleichzeitig noch durch die n Gegen-Paare angreifen läßt, welche in den n, durch jede der Richtungen der gegebenen Kräfte und den Punkt O gegebenen Ebenen liegen, und deren Momente die statischen Momente derselben Kräfte in Bezug auf den Punkt O (als Centrum der Momente) sind.

Die n Kräfte, die jetzt gleichzeitig den Versammlungs-Punkt O angreifen, halten sich nun daselbst im Gleichgewicht, oder sie

lassen sich in eine einzige Kraft P_0 vereinigen, welche wiederum diesen Punkt O angreift.

Die n Gegen-Paare dagegen zerlegen sich nach §. 44. Nr. 5. in 3n Seiten-Gegen-Paare in den 3 Koordinaten-Ebenen (welche letzteren man erhält, wenn man durch O drei beliebige auf einander senkrechte Koordinaten-Axen OX, OY und OZ legt). Die Momente dieser Seiten-Gegen-Paare, sammt ihren richtigen (+ oder —) Vorzeichen erhält man nach Nr. 2., wenn man die gegebenen Kräfte selbst auf die Koordinaten-Ebenen projicirt und von diesen Projektionen, indem man sie sich wiederum als Kräfte denkt, die statischen Momente in Bezug auf den Punkt O nimmt (nach Nr. 2.). — Alle diese Gegen-Paare halten sich nun entweder im Gleichgewicht, oder sie vereinigen sich in ein neues Gegen-Paar Π_0, dessen Ebene wiederum durch den Punkt O geht (nach §. 45.).

Als Endresultat wird man daher finden, entweder a) daß sich alle gegebenen Kräfte im Gleichgewicht halten, oder b) daß eine einzige mittlere Kraft P_0, die durch O geht, existirt, oder c) daß bloß ein Gegen-Paar Π_0 existirt, welches statt aller gegebenen Kräfte gesetzt werden kann, oder endlich d) daß eine Kraft P_0 in O und noch ein Gegen-Paar Π_0 existirt, worauf sich alle gegebenen Kräfte zurückführen lassen.

In dem Falle d. muß dann noch unterschieden werden α) wenn die Versammlungs-Kraft P_0 in O mit ihrer Richtung in der Ebene des Gegen-Paares Π_0 liegt; dann vereinigen sich nämlich alle drei Kräfte genau nach §. 23. oder §. 24. in eine einzige mittlere Kraft, welche der Größe nach wieder $= P_0$ ist, aber von der Versammlungs-Kraft P_0 in O um $\frac{\Pi_0}{P_0}$ absteht, übrigens mit letzterer parallel läuft. — Oder β) wenn die Versammlungs-Kraft P_0 in O in der Ebene des Gegen-Paares Π_0 nicht liegt; dann existirt nicht eine einzige Kraft, die statt aller gegebenen Kräfte gesetzt werden könnte, obgleich sich dann das Gegen-Paar Π_0 in der Ebene so legen läßt, daß die eine der beiden gleichen Gegen-Kräfte, die P_0 in O trifft, daher mit letzterer

in eine neue Kraft vereinigt werden kann. Alle drei Kräfte lassen sich also dann auf zwei Kräfte zurückführen, die nicht alle beide in derselben Ebene liegen. Und solche zwei Kräfte lassen sich auf unendlich viele verschiedene Arten finden, so daß jedes Paar jedes andere ersetzt; nie aber läßt sich dann eine einzige Kraft angeben, welche dasselbe leistet, als alle gegebenen und gleichzeitig angreifenden Kräfte leisten.

§. 47.

Dies führt sogleich zu nachstehenden Resultaten:

1) Beliebig viel gegebene Kräfte P_1, P_2, $P_3 \cdots P_n$ im Raume halten sich einander im Gleichgewicht, wenn

a) die Summen X, Y, Z der Projektionen dieser Kräfte auf jede von drei beliebig angenommenen Koordinaten-Axen OX, OY, OZ, der Null gleich sind; — unter der Voraussetzung, daß man die Projektionen als negativ in Rechnung bringt, sobald die Richtungen der Kräfte mit der Koordinaten-Axe einen stumpfen Winkel machen; —

und wenn

b) die Summen L, M, N der statischen Momente der Projektionen dieser Kräfte, letztere wiederum als Kräfte gedacht, auf jede der drei Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ, YOZ, — in Bezug auf den beliebigen Punkt O als Centrum der Momente, — der Null gleich sind; — vorausgesetzt, daß die Momente (in diese Rechnung) als negative Zahlen eingeführt werden, sobald die Projektions-Kräfte in den Koordinaten-Ebenen um den Punkt O in einem Sinne drehen wollten, welcher der als positiv angenommenen (Dreh-) Richtung in dieser Koordinaten-Ebene, entgegengesetzt ist *).

---

*) Da die Koordinaten-Axen beliebig gelegt werden können, so erhält man im Falle des Gleichgewichts unendlich viele solcher Systeme von 3 und 3 (d. h. 6) Gleichungen des Gleichgewichts. Da aber irgend drei Gleichungen der ersteren Gattung die übrigen derselben Gattung als nothwendige algebraische (trigonometrische) Folgerungen nach sich ziehen, und

2) Sind die ersteren drei Bedingungen (in a.) erfüllt, aber nicht alle die letzteren drei (in b.), so reduciren sich alle gegebenen Kräfte auf 3 Gegen-Paare in drei Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ, YOZ, deren (Dreh-) Richtung und Momente durch die (positiven oder negativen) Werthe der in b. beschriebenen Summen L, M, N der statischen Momente der Projektions-Kräfte vorgestellt sind. Und diese drei Gegen-Paare verwandeln sich dann in ein einziges, dessen Moment Π_0, Axe und (Dreh-) Richtung durch die Rechnung des §. 44. Nr. 5. bereits gefunden ist, so daß man hat

$$\text{I. } \Pi_0 \cdot \cos\lambda_0 = \text{L}; \quad \text{II. } \Pi_0 \cdot \cos\mu_0 = \text{M};$$

$$\text{III. } \Pi_0 \cdot \cos\nu_0 = \text{N}; \quad \text{IV. } \Pi_0 = \sqrt{\text{L}^2 + \text{M}^2 + \text{N}^2},$$

wenn λ_0, μ_0, ν_0 die Winkel ausdrücken, welche die positive Axen-Seite des Gegen-Paares Π_0, mit den positiven Axen-Seiten OZ, OY, OX der Gegen-Paare L, M, N machen.

3) Sind die letzteren drei Bedingungen (in b.) erfüllt, aber nicht alle drei ersteren (in a.), so vereinigen sich alle gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3, $\cdots P_n$ in eine einzige Kraft P_0, welche den Punkt O angreift, und welche der Größe und Richtung nach aus den in a. erwähnten Summen X, Y, Z, welche jetzt positive oder negative Zahlen seyn werden (oder Null), durch die Rechnung des §. 8. Nr. 2. gefunden wird, nämlich aus den Gleichungen

---

da das ganz Analoge der Fall ist, wenn irgend drei Gleichungen der letzteren Gattung erfüllt sind, so folgt, daß die gegebenen Kräfte einander allemal das Gleichgewicht halten, so oft

a) die Summe der Projektionen der Kräfte auf drei ganz beliebige Axen, es mögen sich solche schneiden oder nicht, und welche Lage dieselben auch zu einander haben mögen, jede für sich der Null gleich ist; und wenn noch

b) die Summe der statischen Momente der Projektionen der Kräfte auf drei ganz beliebige Ebenen, welche ganz beliebige Winkel mit einander machen, und wo man dabei in jeder Ebene ein ganz beliebiges Centrum der Momente wählen kann (also auch für jede der drei Ebenen jedesmal ein anderes), jede für sich der Null gleich ist. (Vergl. Anmerkung 1. zu §. 4. und die Noten zu §. 11. Nr. 2. und zu §. 45. Nr. 2.)

$$\text{I. } P_0 \cdot \cos\alpha_0 = X; \quad \text{II. } P_0 \cdot \cos\beta_0 = Y;$$

$$\text{III. } P_0 \cdot \cos\gamma_0 = Z; \quad \text{IV. } P_0 = +\sqrt{X^2+Y^2+Z^2};$$

wenn nur α_0, β_0, γ_0 die Winkel vorstellen, welche die Richtung von P_0 mit den Axen OX, OY, OZ macht.

4) Sind endlich weder alle Bedingungen in b., noch alle Bedingungen in a. erfüllt, so reduciren sich alle gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3, ⋯ P_n zunächst auf drei, nämlich auf die in Nr. 3. berechnete (Versammlungs-) Kraft P_0, welche den Punkt O angreift, und auf das in Nr. 2. berechnete zugehörige Gegen-Paar von Kräften.

Die Axe dieses Gegen-Paares und die Richtung der Kraft P_0 in O machen einen Winkel ε mit einander, welcher (nach dem Lehrbuch des ges. mathem. Elem.-Unterr. §. 233. V.) bestimmt ist durch

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha_0 \cdot \cos\nu_0 + \cos\beta_0 \cdot \cos\mu_0 + \cos\gamma_0 \cdot \cos\lambda_0,$$

oder, nach Nr. 2. I.—III. und Nr. 3. I.—III.,

$$(☾) \cdots \qquad \cos\varepsilon = \frac{NX+MY+LZ}{\Pi_0 \cdot P_0}.$$

5) In dem Ausnahmsfall nun, wo

$$(\odot) \cdots \qquad NX+MY+LZ = 0$$

seyn sollte, ist $\varepsilon = 90^0$; d. h. die Richtung der Kraft P_0 fällt dann mit der Ebene des Moments Π_0 zusammen; und nur wenn diese Bedingung ($\odot$) erfüllt ist, lassen sich die drei Kräfte in eine einzige vereinigen, die der Größe nach wiederum $= P_0$ ist, mit den Axen OX, OY, OZ wiederum die oben berechneten Winkel α_0, β_0, γ_0 macht, aber nicht durch O geht, sondern in der Ebene des Gegen-Paares Π_0, von O um $\frac{\Pi_0}{P_0}$ abliegt, ganz genau nach §. 23. Nr. 4. und §. 46. Nr. 3.

6) Ist aber diese Bedingung ($\odot$) nicht erfüllt, so kann man doch den (Versammlungs-) Punkt O jedesmal so wählen, daß der Winkel ε ein gegebener wird, weil die Werthe L, M, N und Π_0 von der Lage des Punktes O abhängen, (während X, Y, Z und P_0 von der Lage des Punktes O unabhängig sind, daher

immer dieselben bleiben). Man kann O namentlich allemal auch so wahlen, daß $\varepsilon = 0$ wird, d. h. daß die Richtung der Versammlungs-Kraft P_0 auf der Ebene des Gegen-Paares Π_0 senkrecht zu stehen kommt.

Anmerkung 1. Sind $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; \cdots x_n, y_n, z_n$ die Koordinaten-Werthe der Angriffs-Punkte $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ der Kräfte $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$, und machen letztere mit den Koordinaten-Axen bezüglich die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2 \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \cdots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, so findet sich leicht

$$1)\ X = \Sigma(P \cdot \cos\alpha), \qquad 2)\ Y = \Sigma(P \cdot \cos\beta),$$

$$3)\ Z = \Sigma(P \cdot \cos\gamma),$$

$$4)\ L = \Sigma P(y \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\beta),$$

$$5)\ M = \Sigma P(x \cdot \cos\gamma - z \cdot \cos\alpha),$$

$$6)\ N = \Sigma P(z \cdot \cos\beta - y \cdot \cos\gamma)\ ^{*)};$$

wenn X, Y, Z, L, M, N die Bedeutung des vorstehenden Paragraphen haben.

Anmerkung 2. Es versteht sich von selbst, daß das was für alle Kräfte gilt, auch für unter sich parallele Kräfte, sowie auch für Kräfte gelten müsse, welche mit ihren Richtungen in einer und derselben Ebene liegen, daß also in den Resultaten des gegenwärtigen Kapitels die Resultate des zweiten Kapitels (für beliebige parallele Kräfte) und des vierten Kapitels (für beliebige Kräfte in einer Ebene) als besondere Fälle enthalten seyn müssen.

Anmerkung 3. Eine größere Anzahl interessanter und wichtiger Untersuchungen über den bisher in dem vorliegenden Kapitel behandelten Gegenstand findet man übrigens im „Lehrbuch der Mechanik" Th. II. Kap. III.; für die nächsten Anwendun-

---

*) Um die Summe der statischen Momente der Projektions-Kräfte bequem finden zu können, thut man wohl, statt jeder Kraft P, drei Kräfte $P \cdot \cos\alpha$, $P \cdot \cos\beta$, $P \cdot \cos\gamma$ zu setzen, welche mit P denselben Angriffs-Punkt haben, aber mit den Axen OX, OY, OZ parallel laufen. Die Projektionen dieser Kräfte auf die Koordinaten-Ebenen, bleiben dann den Kräften selbst gleich, oder werden Null; und die Arme der statischen Momente sind dann die Koordinaten der Angriffs-Punkte.

gen ist jedoch nur das Resultat des §. 47. Nr. 1. (für das Gleichgewicht der Kräfte) wohl fest zu halten, weil, wie wir im ganzen fünften Kapitel bereits zur Genüge gesehen haben, alle Untersuchungen der Statik auf die Lehre vom Gleichgewicht zurückgebracht werden können. Deshalb mögen die folgenden Paragraphen noch Einiges über das Gleichgewicht hinzufügen.

§. 48.

Hat man eine Ebene E, und in ihr einen Punkt O, und denkt man sich durch den Punkt O eine Gerade OK senkrecht auf die Ebene E, und zuletzt durch einen beliebigen Punkt O′ dieser letzteren Geraden eine Ebene E′ mit E parallel gelegt; hat man endlich irgend eine Kraft P, welche gegen die Ebenen E und E′, sowie gegen die Axe OO′K ganz beliebig liegt; — so ist es ganz einerlei, ob man diese Kraft P auf E projicirt und dann das statische Moment dieser Projektions-Kraft in Bezug auf das Centrum O nimmt, oder ob man P auf E′ projicirt, und von dieser letzteren Projektions-Kraft das statische Moment in Bezug auf den Punkt O′ als Centrum nimmt.

Man versteht aber das eine oder das andere dieser statischen Momente, wenn man von dem statischen Moment der Kraft P um die Axe OO′K spricht. Die Gerade OO′K heißt dabei die Axe dieser statischen Momente.

Den Satz §. 47. Nr. 1. kann man daher, wenn man sich dieser Redens-Art bedient, nun auch so aussprechen:

Beliebig viel gegebene Kräfte, welche einen Körper in ganz beliebigen Richtungen und Punkten angreifen, halten sich einander im Gleichgewicht,

a) wenn die Summen der Projektionen der Kräfte auf drei beliebige Axen im Raume (die übrigens weder auf einander senkrecht zu stehen, noch überhaupt sich zu schneiden brauchen) jedesmal der Null gleich sind, und wenn noch

b) die Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte um drei beliebig angenommene Axen im Raume (die nicht

gerade auf einander senkrecht zu stehen, ja selbst sich nicht zu schneiden brauchen) der Null gleich ist; —

immer unter der Voraussetzung, daß in a. die Projektionen positiv oder negativ in Rechnung gebracht werden, je nachdem die Kräfte mit der Richtung der Axe spitze oder stumpfe Winkel machen, und daß in b. die Momente positiv oder negativ in Rechnung gebracht werden, je nachdem die Kräfte um die Axe der Momente in einer oder in der entgegengesetzten Richtung drehen würden.

§. 49.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Dieselben Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts lassen sich auch noch auf folgende höchst merkwürdige Art ausdrücken.

Befindet sich irgend ein festes oder loses System im Gleichgewicht vermöge der auf dasselbe wirkenden Kräfte (die Drucke, welche das System von anstoßenden Körpern erleidet, so wie die Reibungen mit gerechnet), und denkt man sich nun eine Hand von außen eingreifend, welche dem ganzen System eine, von der vorigen um unendlich wenig verschiedene Lage giebt, so daß jeder Angriffs-Punkt einen unendlich kleinen Weg beschrieben hat; denkt man sich diesen Weg (welcher deshalb unendlich klein seyn muß, um immer als eine *gerade* Linie angesehen werden zu können) auf die Richtung der, diesen Punkt angreifenden Kraft projicirt, und diese Projektion als positiv oder als negativ in Rechnung gebracht, je nachdem der Weg mit der fraglichen Kraft einen spitzen oder einen stumpfen Winkel macht, — nennt man diesen projicirten Weg die *virtuelle Geschwindigkeit* dieses Angriffs-Punktes in Bezug auf diese Kraft; — nennt man ferner *Moment der virtuellen Geschwindigkeit* das Produkt aus dieser Kraft in diese virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffs-Punktes, — so *ist* (im Gleichgewicht) *allemal die* **Summe** *aller Momente der virtuellen Geschwindigkeiten der Null gleich* *).

*) Dieser Satz, welcher das „*Princip der virtuellen Geschwin-*

Will man nun die oben als nöthig erachtete Anzahl von Gleichgewichts-Gleichungen haben (so daß das Gleichgewicht nothwendig ist), so denkt man sich das System dreimal unendlich wenig fortgerückt und dreimal unendlich wenig gedreht, und nimmt jedesmal die Summe der Momente der virtuellen Geschwindigkeiten der Null gleich.

Liegen jedoch alle Kräfte in einer und derselben Ebene, so sind drei Gleichungen des Gleichgewichts ausreichend, um das Gleichgewicht nothwendig zu machen; dann denkt man sich also das System etwa nur 2 mal fortgerückt und einmal gedreht. Aehnliches gilt, wenn alle Kräfte unter sich parallel seyn sollten, wo man sich, um die früher für diesen Fall hingestellten drei Gleichungen des Gleichgewichts zu erhalten, das System etwa einmal fortgerückt und 2 mal gedreht sich denken kann.

Es ist übrigens dem Anfänger zu empfehlen, alle bisher gelösten Aufgaben aus dem Gesichts-Punkte dieses Paragraphen noch einmal zu lösen.

Schluß-Anmerkung. Wie auch endlich die Gleichungen des Gleichgewichts gefunden werden mögen, so ist es doch nicht immer nöthig, daß man gerade alle Gleichungen hinstellt, welche das Gleichgewicht nothwendig machen, sondern man kann sich häufig mit einigen derselben, zuweilen mit einer einzigen derselben begnügen, sobald solche nur ausreicht, das was gerade gesucht wird, zu geben.

Diese Bemerkung erklärt es, warum z. B. die Behandlung des „Rades an der Welle", wie wir solche im §. 37. gegeben haben, nicht bedeutend falsche Resultate giebt, obgleich sie nach §. 48. oder §. 47. Nr. 1. hätte behandelt werden sollen.

---

digkeiten" genannt wird, ist immer nur theilweise erwiesen worden. Der Verfasser glaubt zuerst einen ganz vollständigen, alle denkbaren Fälle umfassenden Beweis desselben geliefert zu haben in dem „Lehrbuch der Mechanik" Theil II. Kap. X.

Siebentes Kapitel.

Weitere Anwendungen der statischen Lehren der vorhergehenden Kapitel.

Vorerinnerung.

Die allgemeinen im §. 26. und §. 27. festgestellten Principien werden hier natürlich ebenfalls zu Grunde gelegt.

§. 50.

Auf einem Tische, dessen drei Füße in A, B, C (Fig. 45.) auf dem Horizonte aufstehen, liegt lothrecht über D ein Gewicht von P Pfunden; der Tisch selbst wiegt G Pfunde und der Schwer-Punkt desselben liegt lothrecht über S. Man soll finden wie stark jede der drei Stellen A, B, C des Horizontes gedrückt werde.

Sind die Größen dieser Drucke bezüglich durch x, y und z bezeichnet, so hat man zwischen diesen 5 parallelen Kräften, nämlich G und P vertikal nach unten, und (nach §. 26.) x, y, z vertikal nach oben, die Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts hinzuschreiben. Sind daher DE, SF, CH senkrecht auf AB, so wie DI, SK, BL senkrecht auf AC, so sind, wenn man die Kräfte x, y, z, P, G auf die Ebene projicirt, welche die ABC in AB senkrecht durchschneidet, und A zum Centrum der Momente dieser Projektions-Kräfte nimmt, die Summe dieser Momente selbst $= x \cdot 0 + y \cdot AB + z \cdot AH - P \cdot AE - G \cdot AF$. Projicirt man nachgehends dieselben Kräfte auf die Ebene, welche die Ebene ABC in AC senkrecht durchschneidet, so ist die Summe der Momente dieser Projections-Kräfte $= x \cdot 0 + y \cdot AL + z \cdot AC - P \cdot AI - G \cdot AK$. Man hat daher (nach §. 11. Nr. 2. Note) diese drei Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich

1) $x + y + z - P - Q = 0,$

2) $AB \cdot y + AH \cdot z - AE \cdot P - AF \cdot G = 0,$

3) $AT \cdot y + AC \cdot z - AI \cdot P - AK \cdot G = 0.$

Die beiden letzteren Gleichungen geben y und z; die erstere giebt dann x dazu.

Anmerkung. Hätte der Tisch vier Füße, so daß vier Drucke x, y, z, v gesucht würden, so würde man doch wieder nur drei Gleichungen des Gleichgewichts erhalten; also würden dann nur drei der vier unbekannten Drucke in den vierten aus-

ge-

gedrückt gefunden, während einer unbestimmt bleibt. — (Vergl. §. 29. und §. 33., wo bereits analoge Betrachtungen angestellt sind.)

§. 51.

Eine Stange AB steht mit ihrem einen Ende A auf einem horizontalen Fußboden MVN (Fig. 46.) dergestalt fest, daß sie sich um A zwar drehen, aber nicht von A abweichen kann; mit ihrem anderen Ende B lehnt sie sich lose und schief gegen eine vertikale Wand NVR, so nämlich, daß ihre Projektion CB auf letztere mit der Durchschnitts-Linie NV der Wand und des Fußbodens, den spitzen Winkel BCD $= \varphi$ macht. Wie groß kann φ werden, damit die Stange durch die bloße Reibung bei B an der Grenze des Herabgleitens gerade noch im Gleichgewicht erhalten wird? —

Ist die senkrechte Entfernung AC des Punktes A von der Wand, $= a$; ist ferner die Länge der Stange $= b$ gegeben, so hat man auch die Winkel BAC $= \alpha$ und ABC $= \beta$, welche immer dieselben bleiben, wo auch das Ende B der Stange, an der Wand verweilen mag; denn es ist $BC = \sqrt{b^2 - a^2}$ und $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{a}{b}$.

Beim Heruntergleiten der Stange an der Wand beschreibt ihr Ende B einen Kreisbogen, dessen Radius $=$ BC ist; die Reibung wirkt daher in der Richtung BH senkrecht auf BC. —

Es sey nun P das Gewicht der Stange, in ihrer Mitte der Schwer-Punkt S derselben, so wird im Zustande des Gleichgewichts der Punkt A des Fußbodens in einer unbekannten Richtung gedrückt, welcher Druck nach den drei Axen zerlegt drei unbekannte Drucke liefert; deswegen bringen wir an der Stange in A (nach §. 26.) die drei unbekannten (Gegen-) Drucke x, y, z nach den Axen ACX, AY (parallel mit NV) und AZ (senkrecht auf MVN) an, wo dann die aus der Endrechnung hervorgehenden positiven oder negativen Werthe von x, y, z, uns erst zeigen, ob diese (Gegen-) Drucke wirklich in den Richtungen dieser Axen, oder in den genau entgegengesetzten Richtungen statt finden. Da die Stange bei B ganz lose aufsitzt, so findet daselbst (nach §. 26.) ein Druck senkrecht gegen die Wand NVR statt, weshalb wir an der Stange B einen eben so großen (Gegen-) Druck x′ (der Mauer gegen die Stange) anbringen. Die Reibung ist dann $\mu x'$ in der Richtung BH; und nach Umständen setzen wir dafür die beiden Seiten-Kräfte $\mu x' \cdot \sin\varphi$ in der Richtung BF (parallel mit AY) und $\mu x' \cdot \cos\varphi$ in der Richtung BG, welche letztere, rückwärts verlängert, die NV in D trifft und senkrecht auf NV steht, also mit AZ parallel läuft.

Bayerische Staatsbibliothek München

Da nun die 7 Kräfte, P, x, y, z, x', $\mu x' \cdot \sin\varphi$, $\mu x' \cdot \cos\varphi$ an der festen Stange AB (nach §. 26.) einander das Gleichgewicht halten, so erhält man (nach §. 47. Nr. 1.) sogleich die 6 Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich, wenn A als Centrum der Momente genommen wird,

I. $x - x' = 0$; II. $y - \mu x' \cdot \sin\varphi = 0$;

III. $z + \mu x' \cdot \cos\varphi - P = 0$;

IV. $x' \cdot \cos\varphi \cdot \sqrt{b^2 - a^2} - \mu x' \cdot a \cdot \sin\varphi = 0$;

V. $\frac{1}{2} a \cdot P - \mu x' a \cdot \cos\varphi - x' \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{b^2 - a^2} = 0$;

VI. $\frac{1}{2} P \cdot \cos\varphi \cdot \sqrt{b^2 - a^2} - \mu x' \cdot \sqrt{b^2 - a^2} = 0$.

Dies ist also der Ansatz der Aufgabe.

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert

1) $$\cot g\,\varphi = \mu \cdot \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \mu \cdot \cot g\,\alpha;$$

2) $$x' = \frac{\frac{1}{2} P \cdot \cos\varphi}{\mu};$$

3) $$x = x' = \frac{\frac{1}{2} P \cdot \cos\varphi}{\mu};$$ 4) $$y = \frac{1}{4} P \cdot \sin 2\varphi;$$

und 5) $$z = P \cdot (1 - \tfrac{1}{2} \cos\varphi^2).$$

Endlich wird die Gleichung V. durch die aus den übrigen Gleichungen erhaltenen Werthe von φ und x genau identisch.

Hätte man bloß den Winkel φ finden wollen und nichts weiter, so hätte man von allen 6 Gleichungen I. — VI. nur die IV. ganz allein hingeschrieben, und aus dieser φ gefunden.

§. 52.

Von der Schraube.

Eine Schrauben-Spindel QKC (Fig. 47.) geht in einer unbeweglichen Schrauben-Mutter DFEG, und ihre Axe CK stehe vertikal. Unten in C hänge eine Last, welche mit Inbegriff des Gewichts der Spindel $= W$ seyn mag. Oben bei Q steckt ein horizontaler Hebel-Arm AQ von der Länge R, an dessen Ende eine Kraft P in einer auf ihm senkrechten und horizontalen Richtung wirken mag. Der mittlere Halbmesser der Spindel sey $= r$. Die Kraft P zu finden, welche der Last W das Gleichgewicht hält, unter der Voraussetzung, daß die Kraft P bereits die Reibung mit überwunden hat.

Wir lassen die Reibung an den Rändern der Gewinde ganz außer Acht und denken uns den Druck N der Schrauben-Gewinde auf einander auf einen einzigen Schraubengang gleichmäßig vertheilt, so daß auch die Reibung μN gleichmäßig vertheilt gedacht ist. Denkt man sich nun drei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen, nämlich QA, QY und QC und ist das Schrauben-Gewinde ein stumpfes, so heben sich diese Reibungen, nach jeder der beiden horizontalen Axen zerlegt und summirt, einander auf; nach der vertikalen Axe zerlegt und summirt, giebt diese Reibung

1) $\mu N \cdot \sin\alpha$, wo $tg\,\alpha = \frac{h}{2r\pi}$

ist, während h die Höhe des Schrauben-Ganges und r den mittleren Halbmesser der Schrauben-Spindel vorstellt, so daß α der Neigungs-Winkel der mittleren Schrauben-Linie gegen den Horizont ist, wobei man sich Druck und Reibung in der mittleren Schrauben-Linie vereinigt gedacht hat. In der Richtung der Tangente des mit r beschriebenen Kreises zerlegt, giebt die Reibung die Kraft

2) $\mu N \cdot \cos\alpha$

und das statische Moment dieser Reibung um CQ herum (d. h. diese Reibung auf die Ebene AQY projicirt, und dann das statische Moment dieser Projektion für den Punkt Q als Centrum, genommen) wird

3) $= \mu r N \cdot \cos\alpha$.

Der Druck N zerlegt, giebt 4) $N \cdot \cos\alpha$ nach der Richtung QC und 5) $N \cdot \sin\alpha$ nach der Tangente des mit r beschriebenen Kreises, so daß das statische Moment dieser letzteren (auf die Ebene AQY projicirt und in Bezug auf Q als Centrum der Momente genommen) $= rN \cdot \sin\alpha$ wird. — Nimmt man nun von den 6 Gleichungen des Gleichgewichts nur die beiden, nämlich die Summe aller nach QC zerlegten Kräfte der Null gleich, und dann noch die Summe der statischen Momente aller auf AQY projicirten Kräfte, in Bezug auf Q als Centrum genommen, der Null gleich, — so hat man die beiden Gleichungen

I. $W - N \cdot \cos\alpha + \mu N \cdot \sin\alpha = 0$,

II. $P \cdot R - Nr \cdot (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) = 0$,

und man kann nun N und P finden.

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen giebt

$$N = \frac{W}{\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha}$$

und $$P = \frac{r}{R} \cdot \frac{\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha} \cdot W = \frac{r}{R} \cdot \frac{h + 2\mu r\pi}{2r\pi - \mu h} \cdot W.$$

Anmerkung. Rechnet man die Reibung zu Gunsten der Kraft, d. h. will man das Gleichgewicht an der andern Grenze haben, so darf man hier nur $-\mu$ statt μ setzen. Der dann für P zuweilen sich ergebende negative Werth zeigt zugleich an,

7*

daß die Kraft P die genau entgegengesetzte Richtung hat, was ohnedies in die Augen fällt.

§. 53.

Von der Stabilität der Mauern.

Ein System steht im stabilen Gleichgewicht, wenn es von selbst strebt in den Zustand des Gleichgewichts zurückzutreten, im Falle es ein wenig daraus entfernt worden seyn sollte. Im andern Fall ist das Gleichgewicht nicht stabil.

Denkt man sich eine Mauer als einen Körper, der auf dem horizontalen Boden lose aufsitzt, so ist sie im stabilen Gleichgewicht; denn jeder von der einen Seite kommenden Kraft, welche sie umkanten will, wirkt ihr eigenes Gewicht entgegen, und sie kantet nicht um, so lange das statische Moment ihres eigenen Gewichts in Bezug auf die Kante, um welche sie feindliche Kräfte umkanten wollen, größer oder gleich ist der Summe der statischen Momente dieser letzteren Kräfte in Bezug auf dieselbe Kante.

Die Stabilität der Mauer gegen gedachte feindliche Kräfte wird um desto größer genannt, je größer das gedachte statische Moment ihres Gewichtes ist. Bei derselben Höhe und Länge der Mauer und bei derselben Menge des dazu verwendeten Materials wird also eine Mauer stabiler werden (gegen von der einen Seite herkommende feindliche Kräfte), wenn man a) der Mauer eine Plinte giebt, oder b) nach der Seite zu, welche der entgegengesetzt ist, gegen welche die feindlichen Kräfte wirken, Strebepfeiler anbringt, oder überhaupt c) der Mauer nach dieser Seite zu eine breitere Basis giebt.

Die Berechnung der Stabilität einer Mauer ist also weiter nichts, als die Berechnung des statischen Momentes ihres Gewichts in Bezug auf die Kante ihrer Grundfläche, um welche feindliche Kräfte solche umzukanten streben.

Beispiele hierzu finden sich im 2ten Anhange §. §. 119. ff.

§. 54.

Vom Seil-Polygon.

Wir denken uns hier die Seile stets vollkommen biegsam und ohne Schwere.

1) Treffen drei Seile AK, BK, CK in einem Knoten K (Fig. 48.) zusammen, und ziehen an denselben bezüglich die Kräfte Q, Q′, P, so sind letztere, wenn die Gewichte und die Steifigkeit der Seile nicht in Anschlag gebracht werden, im Gleichgewicht, wenn

$$Q : \sin CKB = Q' : \sin AKC = P : \sin AKB$$

ist (nach §. 4. und §. 6. Nr. 4) *).

Und ist diese Maschine in den Punkten A und B angehängt an unbewegliche Haken, so drücken die aus diesen Gleichungen zu findenden Werthe von Q und Q′ die Spannungen der Seile AK und BK aus, oder die Drucke, welche die Haken in A und B zu erleiden haben **).

2) Ist aber K kein Knoten, sondern kann das Seil CK bei K an einem Ringe längs des Seils AKB sich bewegen, so ist zum Gleichgewicht noch nöthig, daß die Richtung CK den Winkel AKB halbire. Aus dieser Bedingung bestimmt sich dann die Lage von K, im Falle des Gleichgewichts.

3) Hat ein Seil AKK′B (Fig. 49.) zwei Knoten K und K′, an welchen nach beliebigen Richtungen KC und K′D (die nicht mit KK′ in einer und derselben Ebene zu liegen brauchen) die Kräfte P und P_1 ziehen, so kann nicht Gleichgewicht seyn, wenn nicht jeder Knoten für sich im Gleichgewicht ist. Ziehen also in

---

*) Aus diesen Gleichungen geht schon hervor, daß ein Seil, an welchem ein Gewicht hängt, nie und mit keinen Kräften ganz gerade gespannt werden kann.

**) Brustriemen, Tragriemen und Zugseil eines ziehenden Pferdes bilden eine solche Seilmaschine mit festem Knoten. In den Anwendungen muß man daher nach §. 26. den Wagen oder Schlitten für sich, und dann auch die eben gedachte Seilmaschine für sich in's Gleichgewicht stellen, um zu bekommen, wie stark das Pferd durch den Brustriemen, und wie stark es durch den Tragriemen gedrückt wird.

den gegebenen Richtungen KA und K'B die Kräfte Q und Q', und wird durch T die Spannung des Seil-Stückes KK' d. h. die Kraft bezeichnet, mit welcher K gegen K' und K' gegen K gezogen wird (im Falle des Gleichgewichts), so bekommt man zwei Gleichungen für das Gleichgewicht von K, und noch zwei für das Gleichgewicht von K', während die Seile KA, KC und KK' in einer, dagegen K'K, K'D und K'B im Allgemeinen in einer anderen Ebene liegen werden. — Behandelt man daher das Problem so, daß man durch A drei Koordinaten-Axen legt, so bekommt man für das Gleichgewicht eines jeden Knotens drei Gleichungen. Wenn man nachgehends diese paarweise addirt, so eliminirt sich die unbekannte Spannung T, und man erhält die 3 Gleichungen

$$Q \cdot \cos a + P \cdot \cos\alpha + P_1 \cdot \cos\alpha_1 + Q' \cdot \cos a' = 0;$$
$$Q \cdot \cos b + P \cdot \cos\beta + P_1 \cdot \cos\beta_1 + Q' \cdot \cos b' = 0;$$
$$Q \cdot \cos c + P \cdot \cos\gamma + P_1 \cdot \cos\gamma_1 + Q' \cdot \cos c' = 0;$$

wenn a, b, c; α, β, γ; α_1, β_1, γ_1; a', b', c' die Winkel sind, welche die Kräfte Q, P, P_1, Q' bezüglich mit den 3 Koordinaten-Axen machen.

4) Hat ein Seil beliebig viele z. B. n Knoten, an welchen Kräfte $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$ ziehen in beliebigen Richtungen, so erhält man auf demselben Wege die drei Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich:

$$Q \cdot \cos a + \Sigma(P \cdot \cos\alpha) + Q' \cdot \cos a' = 0;$$
$$Q \cdot \cos b + \Sigma(P \cdot \cos\beta) + Q' \cdot \cos b' = 0;$$
$$Q \cdot \cos c + \Sigma(P \cdot \cos\gamma) + Q' \cdot \cos c' = 0.$$

So oft aber einer der Knoten beweglich ist, so tritt für ihn noch die neue Gleichung hinzu, welche ausdrückt, daß die Richtung der an ihm ziehenden Kraft den Winkel, welchen seine beiden Seil-Enden mit einander machen, halbirt.

Und sind die End-Punkte dieses Seiles befestigt, so drücken Q und Q' die Spannungen aus, welche die äußersten Seil-Enden (im Gleichgewicht) erleiden.

Liegen alle Knoten mit den daran ziehenden Kräften in einer

und derselben Ebene, so hat man, wenn die Koordinaten-Axen in derselben Ebene gelegt werden, nur zwei der drei Gleichungen.

Sind endlich die Kräfte P_1, P_2, P_3, $\cdots P_n$ lauter Gewichte, und nimmt man die Axen horizontal und vertikal, so sind diese beiden Gleichungen jetzt so:

$$Q \cdot \cos a + Q' \cdot \cos b' = 0,$$

$$Q \cdot \cos b + \Sigma(P) + Q' \cdot \cos b' = 0,$$

wo $\Sigma(P)$ die Summe aller angehängten Gewichte bedeutet.

5) Da die Abstände je zweier festen Knoten von einander bekannt sind (und im Falle eines beweglichen Knotens dazwischen, die Summe der Abstände desselben von den beiden nächstanliegenden festen Knoten bekannt ist, und die Bedingung, daß die Richtung der Kraft am beweglichen Knoten den Winkel der Seil-Enden daselbst halbirt), und da man aus den Gleichungen des Gleichgewichts jedes einzelnen Knotens nach und nach die Richtung jedes einzelnen Seil-Endes zwischen je zweien Knoten berechnen kann, so kennt man zuletzt an der ganzen Figur des Seils im Gleichgewicht, in so fern solches ein Polygon bildet, alle dazu benöthigten Stücke.

Und wendet man dieses auf den Fall an, in welchem das Seil unendlich viele feste Punkte hat, an welchen Kräfte ziehen, so findet man die dann entstehende Seil-Kurve. — Denkt man sich, daß alle Punkte eines Seiles durch gleiche Gewichte belastet seyen und namentlich durch das eigene Gewicht der Seil-Elementchen, so erhält man die so genannte Ketten-Linie.

Näheres über diesen Gegenstand findet sich im „Lehrbuch der Mechanik" Th. II. Kap. XV.

Zweiter Abschnitt.

Die Dynamik fester Körper.

Achtes Kapitel.

Die Bewegung des Atoms.

A. Die geradlinige Bewegung des Atoms.

§. 55.

Zu dem im §. 1. über die Bewegung, Geschwindigkeit, Bahn, ꝛc. bereits Gesagten fügen wir hier zunächst noch Folgendes hinzu:

1) Jede Bewegung eines Atoms ist so lange konstant (gleichförmig) und geradlinig, als keine neue Ursache (d. h. Kraft) hinzutritt, welche sie ändert.

2) In jedem Augenblick kann man den bewegten Atom in Ruhe sich denken, aber so eben von einer, seiner Geschwindigkeit c gleich kommenden Kraft in der Richtung der Bewegung ergriffen *).

3) Tritt daher bei einer konstanten Bewegung, welche die

*) Man übersehe ja nie, daß wir die „Kraft“ und die „Geschwindigkeit“, welche sie einem ruhenden Atom giebt, immer durch eine und dieselbe Zahl ausdrücken, weil wir die Kräfte nur in ihren Leistungen wahrnehmen können (§. 1. Nr. 6.).

Geschwindigkeit c hat, in derselben Richtung die Kraft c′ noch hinzu (welche also einem ruhenden Atom die Geschwindigkeit c′ geben würde), so tritt in derselben Richtung eine neue Bewegung ein, welche wieder konstant und geradlinig ist, aber die Geschwindigkeit $c+c'$ hat (nach §. 2.), wo c′ negativ in Rechnung gebracht werden muß, wenn die neu hinzugetretene Kraft der Richtung der ersteren Bewegung genau entgegen wirkte.

4) Tritt aber die Kraft c′ in einer andern Richtung hinzu, als die der Geschwindigkeit c ist, so denkt man sich an der Stelle, wo der Atom von dieser neuen Kraft erreicht wird, denselben ruhend, und gleichzeitig von den beiden Kräften c und c′ ergriffen; — man vereinigt beide Kräfte, jede in ihrer Richtung wirkend gedacht, nach dem Kräften-Parallelogramm in eine einzige, und diese letztere ist dann, ihrer Größe und Richtung nach, die Geschwindigkeit und die Richtung der neuen konstanten und geradlinigen Bewegung, welche nun eintritt.

5) Treten also in, von einander mehr oder weniger entfernten Zeiträumen, immer neue und neue Kräfte hinzu, so geht die Bewegung aus einer geradlinigen und konstanten in die andere über, deren jede wieder geradlinig und konstant ist, jedoch im Allgemeinen eine andere Richtung und eine andere Geschwindigkeit haben wird, als die nächst vorhergehende. — Die Bahn wird also im Allgemeinen eine gebrochene Linie, ausnahmsweise aber auch eine einzige gerade Linie seyn können.

6) Treten aber Kräfte stetig hinzu, d. h. in allen dicht auf einander folgenden, stetig neben einander liegenden Zeitpunkten, — so entsteht die veränderliche (ungleichförmige) Bewegung, welche ihre Richtung, oder ihre Geschwindigkeit oder beides, stetig ändert. Die Bahn ist jetzt im Allgemeinen krummlinig, obgleich sie auch ausnahmsweise geradlinig bleibt, wenn die unendlich vielen nach und nach (stetig) hinzutretenden Kräfte alle in der anfänglichen Richtung der Bewegung wirken.

In diesem Falle ist es aber besonders wichtig zu bemerken, daß diese stetig hinzutretenden Kräfte, eben weil ihre Wirkung unendlich oft sich wiederholt, jedesmal unendlich klein seyn müs-

sen, wenn nicht die von ihnen in sehr kurzer Zeit hervorgebrachte Geschwindigkeit unendlich groß, die Bewegung selbst also für unsere Sinne nicht mehr bemerkbar seyn soll.

7) Diese stetig an einem bewegten Atom neu hinzutretenden Kräfte (welche sehr unpassend beschleunigende Kräfte genannt werden, da sie eben so gut verzögern, ja abwechselnd beschleunigen und verzögern können) bezeichnen wir hier immer durch Produkte von der Form $\varphi \cdot dt$, $X \cdot dt$, ꝛc., wo der Faktor dt die unendlich kleine Zeit vorstellen soll, innerhalb welcher die Wirkung sich nicht wiederholt, während dann der andere Faktor φ, X, ꝛc. die Geschwindigkeit vorstellt, welche sich (in einem Atom) in einer Sekunde mittlerer Zeit ansammeln würde, wenn die Kraft $\varphi \cdot dt$, oder $X \cdot dt$, oder ꝛc. diese Sekunde hindurch in derselben Richtung, und ohne ihre Intensität zu verändern, auf einen Anfangs ruhenden Atom wirken wollte.

Steckt nämlich die unendlich kleine Zeit dt in der Sekunde n mal, so daß $n \cdot dt = 1$ ist, so wirkt die Kraft $\varphi \cdot dt$ in der Sekunde n mal, und bringt daher (nach Nr. 3.) die Geschwindigkeit $n \times \varphi \cdot dt$ d. h. $\varphi \times n \cdot dt$ d. h. $\varphi \cdot 1$ oder φ hervor *).

§. 56.

Konstante Bewegung eines Atoms.

Geschwindigkeit einer Bewegung in einem bestimmten Augenblick ist (nach §. 1.) der Quotient $\frac{ds}{dt}$, wenn ds den von die-

---

*) Daher ist die Schwere z. B. eine unendlich kleine Kraft, welche wir durch $2g \cdot dt$ bezeichnen, wo dt die unendlich kleine Zeit ausdrückt, innerhalb welcher ihre Wirkung sich nicht wiederholt, während 2g die durch diese, immer in derselben Richtung wiederholte Wirkung innerhalb 1 Sekunde mittlerer Zeit hervorgebrachte Geschwindigkeit vorstellt. — Man findet in unseren Breiten und für unser rheinl. Fußmaaß $2g = 31\frac{1}{4}$, also $g = 15\frac{5}{8}$.

Diese durch g ausgedrückte Zahl nennt man zwar auch häufig die Schwere; allein man möge nie vergessen, daß die Schwere hier allemal durch $2g \cdot dt$ ausgedrückt ist. — Drückt man sie durch $g \cdot dt$ aus (wie dies im „Lehrbuch der Mechanik“, Berlin 1836—38, geschehen ist), so muß dann $g = 31\frac{1}{4}$ (in unseren Breiten und für rheinl. Maaß) genommen werden.

sem Augenblick ab in der unendlich kleinen Zeit dt beschriebenen unendlich kleinen Bahn-Theil bezeichnet. — Ist aber die Bewegung konstant (gleichförmig), so ist die Geschwindigkeit in jedem Augenblick eine und dieselbe; in jedem Zeit-Theilchen dt wird ein gleich großes Bahn-Theilchen ds beschrieben, also in der Zeit m·dt die Bahn m·ds, so daß deshalb dann (bei der konstanten Bewegung, und nur bei dieser) die Geschwindigkeit auch durch $\frac{s}{t}$ ausgedrückt ist, wenn s den in jeder beliebig großen Zeit $t = m \cdot dt$ beschriebenen Raum m·ds vorstellt (weil nun $\frac{s}{t} = \frac{m \cdot ds}{m \cdot dt} = \frac{ds}{dt}$ sich findet).

Ist der von einer konstanten Bewegung in der Zeit $t = 1$ (Sek.) beschriebene Raum $s = c$ (rheinl. Fuße), so ist die Geschwindigkeit $\frac{s}{t} = \frac{c}{1} = c$; d. h. bei der konstanten Bewegung ist die Zahl, welche die Geschwindigkeit der Bewegung in jedem Augenblick ausdrückt, nicht nur stets eine und dieselbe, sondern der (unbenannten) Zahl der (rheinischen) Fuße gleich, welche diese konstante Bewegung in jeder Sekunde (mittlerer Zeit) durchläuft.

Ist bei einer konstanten Bewegung die Geschwindigkeit durch die (unbenannte) Zahl c ausgedrückt, so hat man also

$$(\odot) \cdots \qquad \frac{s}{t} = c \quad \text{oder} \quad s = ct;$$

wo die Zeit t in Sekunden mittlerer Zeit und der Raum s in rheinischen Fußen ausgedrückt ist. — Danach kann man den, in jeder Zeit t beschriebenen Weg s berechnen, so wie auch umgekehrt t wieder aus s finden, wenn nur c gegeben ist.

§. 57.

Gleichförmig beschleunigte oder gleichförmig verzögerte Bewegung.

I. Hat ein Atom eine Anfangs-Geschwindigkeit $= c$, und tritt vom Anfang an eine konstante Kraft p·dt stetig und immer

in derselben (Anfangs-) Richtung noch hinzu, so besteht die Geschwindigkeit v der Bewegung zu Ende der Zeit t, einmal aus der Anfangs-Geschwindigkeit c, und dann noch aus den (nach §. 55. Nr. 3.), t Sekunden lang angesammelten Geschwindigkeiten p·dt, welches letztere in der Sekunde (nach §. 55. Nr. 7.) die Geschwindigkeit p giebt, also in t Sekunden die Geschwindigkeit p·t hervorbringt. — Man hat also unter dieser Voraussetzung

1) $$v = c + p \cdot t;$$

und diese Bewegung heißt eine **gleichförmig beschleunigte**.

Um den Raum s zu finden, den diese Bewegung in t Sekunden (vom Anfang an gerechnet) durchläuft, sey das Zeit-Elementchen dt, in der Sekunde n mal, also in den t Sekunden nt mal enthalten, so daß eben so oft die Kraft p·dt auf's Neue hinzutritt. Die ganze Bewegung besteht daher aus einer Anzahl nt hinter einander folgender konstanter Bewegungen, von welchen jede nur eine unendlich kleine Zeit dt dauert, und die, nach der Ordnung die Geschwindigkeiten

$$c+p\cdot dt,\quad c+2p\cdot dt,\quad c+3p\cdot dt, \cdots\cdot c+ntp\cdot dt$$

haben, also nach der Ordnung (nach §. 56. ⊙) die Räume

$$(c+p\cdot dt)\cdot dt,\quad (c+2p\cdot dt)\cdot dt,\quad (c+3p\cdot dt)\cdot dt, \cdots\cdot (c+ntp\cdot dt)\cdot dt$$

beschreiben, deren Summe der Raum s ist. Man findet daher, weil $1+2+3+\cdots+nt = \frac{(nt+1)\cdot nt}{2} = \frac{1}{2}n^2t^2+\frac{1}{2}nt$ ist,

$$s = nt \times c\cdot dt + (\tfrac{1}{2}n^2t^2+\tfrac{1}{2}nt)p\cdot(dt)^2,$$

während $n\cdot dt = 1$, also $n = \frac{1}{dt}$ ist. Also hat man, wenn dieser Werth statt n gesetzt wird,

$$s = ct+\tfrac{1}{2}pt^2+\tfrac{1}{2}pt\cdot dt,$$

wo aber der dritte Summand $\frac{1}{2}pt\cdot dt$, wegen des unendlich kleinen Faktors dt, selbst unendlich klein, also der Null nächst anliegend ist, und deshalb weggelassen werden muß.

Man findet also, wenn s den in den ersteren t Sekunden beschriebenen Raum vorstellt, für die hier vorausgesetzte Bewegung

2) $$s = ct+\tfrac{1}{2}pt^2.$$

Dieser Raum s besteht also, wie man sieht, aus zwei Theilen, von welchen der eine ct von der Anfangs-Geschwindigkeit herrührt und mit der Zeit t, der andere $\frac{1}{2}pt^2$ aber von der stetig einwirkenden (beschleunigenden) Kraft herrührt und mit dem **Quadrat** der Zeit t proportional ist.

Die beiden Gleichungen 1. und 2. lassen aber von den drei Größen t, v und s, irgend zwei berechnen, sobald die dritte gegeben ist, und c und p bekannt sind.

Sind aber t, v, s alle drei für irgend einen Werth von t, z. B. für $t = 1$ bekannt (etwa aus einem Versuch), so kann man aus diesen Gleichungen 1. und 2. auch c und p dazu finden.

II. Wirkt die Kraft $p \cdot dt$ stetig der Anfangs-Geschwindigkeit genau entgegen, so findet sich auf dieselbe Weise

1) $$v = c - pt$$

und 2) $$s = ct - \tfrac{1}{2}pt^2;$$

und dies sind die beiden Gleichungen für die gleichförmig verzögerte Bewegung, wo v und s die zu Ende der Zeit t vorhandene „Geschwindigkeit" und „Bahn-Länge" vorstellen.

Bei dieser gleichförmig verzögerten Bewegung kann man aus der Gleichung 1. die Zeit $t = \frac{c}{p}$ finden, für welche die Geschwindigkeit v der Null gleich wird, der Atom also zur Ruhe kommt. Der ganze beschriebene Weg $\mathfrak{s}$ wird dann aus 2 gefunden, nämlich

$$\mathfrak{s} = ct - \tfrac{1}{2}pt^2 = \tfrac{1}{2}\frac{c^2}{p}.$$

Anmerkung. Aendert die Kraft $p \cdot dt$ (also der Faktor p) mit der Zeit ihre Intensität (in welchem Falle p als eine Funktion der Zeit angesehen werden muß), so entsteht die allgemeine veränderliche geradlinige Bewegung, welche die so eben betrachteten Bewegungen als besondere Fälle in sich schließt. — Dies soll der nächste Paragraph zeigen.

§. 58.

Veränderliche Bewegung des Atoms überhaupt.

Wirkt aufser der Anfangs-Geschwindigkeit c noch eine stetige Kraft $\varphi \cdot dt$, wo aber φ selbst noch beliebig, konstant oder mit der Zeit veränderlich, also im Allgemeinen eine Funktion der Zeit t ist, während t jede Zeit von 0 an bis zu irgend einem bestimmten Endwerth von t hin vorstellt; und sind v und s bezüglich die zu Ende einer bestimmten Zeit t vorhandenen „Geschwindigkeit" und „Weg", so hat man allemal

$$I.\quad v = c + \int_{t \div 0} \varphi \cdot dt, \quad \text{oder} \quad \partial v_t = \varphi,$$

und

$$II.\quad s = \int_{t \div 0} v \cdot dt, \quad \text{oder} \quad \partial s_t = v.$$

Aus diesen beiden Gleichungen *I.* und *II.* kann man aber von den 4 Gröfsen t, v, s und φ irgend zwei finden, sobald die anderen beiden bekannt sind, so dafs im Ganzen 2 mal 6 Aufgaben damit gelöst werden können.

Die Richtigkeit dieser beiden Formeln ergiebt sich aus dem Hauptsatze §. 17. No. 5. der Integral-Rechnung. Danach drückt nämlich $\int_{t \div 0} \varphi \cdot dt$ die Summe aller vom Anfang an bis zu dem Endwerth von t hinzugetretenen Geschwindigkeiten $\varphi \cdot dt$ aus. Also ist die *I.* richtig. — Ist aber v die Geschwindigkeit zu Ende einer jeden Zeit (eine Funktion von t, also mit der Zeit selbst sich ändernd), so ist (nach §. 56. ⊙) $v \cdot dt$ der mit dieser Geschwindigkeit in der Zeit dt beschriebene Weg jeder einzelnen der unendlich vielen konstanten Bewegungen, aus denen die ganze (veränderliche) Bewegung besteht. Also drückt nach §. 17. No. 5. $\int_{t \div 0} v \cdot dt$ die Summe aller dieser unendlich vielen und unendlich kleinen Wege aus, vom Anfang (wo $t = 0$ ist) an bis zu dem Endwerth von t hin; wodurch die *II.* aufser Zweifel gesetzt ist.

Anmerkung. Wird φ konstant und $= p$, so ist $\int_{t \div 0} \varphi \cdot dt = \int_{t \div 0} p \cdot dt = p \cdot t$, also wird nun aus *I.* und *II.*

$$1)\quad v = c + p \cdot t \quad \text{und} \quad 2)\quad s = ct + \tfrac{1}{2} pt^2,$$

also gerade so wie wir für denselben Fall v und s im §. 57. *I.* gefunden haben.

Ist aber φ konstant und $= -p$, so wird

$$\int_{t \div 0} \varphi \cdot dt = \int_{t \div 0} -p \cdot dt = -pt,$$

folglich wird nun, wie auch im §. 57. *II.* für denselben Fall gefunden worden,

$$1')\quad v = c - p \cdot t \quad \text{und} \quad 2')\quad s = ct - \tfrac{1}{2} pt^2.$$

In anderen und weniger einfachen Fällen kann das Integriren der Gleichungen *I.* und *II.* grofse Schwierigkeiten machen. Darüber lese man das „Lehrbuch der Mechanik" *I.* Th. Mech. Kap. *IV.* u. *V.*

§. 59.

Freier Fall und Fall auf der schiefen Ebene.

Zu den gleichförmig beschleunigten Bewegungen gehören unter andern auch der freie Fall der Körper, auf welche die Schwere $2g \cdot dt$ wirkt, so daß $p = 2g$ ist; und der Fall auf einer, gegen den Horizont geneigten und mit letzteren den Winkel α machenden schiefen Ebene, wo in jedem Punkte der Bahn längs der schiefen Ebene die Kraft $2g \cdot dt \times \sin\alpha$ auf's neue hinzutritt, so daß dann $p = 2g \cdot \sin\alpha$ gedacht werden muß. — Die Resultate des §. 57. I. geben:

A. Für den freien Fall

I. $v = c + 2gt$ und II. $s = ct + gt^2$.

Denkt man sich für diesen freien Fall die Anfangs-Geschwindigkeit $c = 0$, so werden die Gleichungen, im Falle man nun h statt s schreibt,

1) $v = 2gt$ und 2) $h = gt^2$;

d. h. dann sind die Geschwindigkeiten (v) mit den Zeiten (t), die Wege (Fallhöhen h) dagegen mit den Quadraten der Zeiten (t^2) proportional. — Eliminirt man zuletzt t aus 1. und 2., so ergiebt sich noch

3) $v^2 = 4gh$, oder $v = 2\sqrt{gh}$,

während v auch die zu der Fallhöhe h gehörige Geschwindigkeit genannt wird *).

Die erlangten Geschwindigkeiten verhalten sich also wie die Quadrat-Wurzeln aus den Fallhöhen.

Für $t = 1$ wird aus 2. noch $g = h$, d. h. die Zahl g ist der Zahl der rheinischen Fuße gleich, welche ein Atom in der ersten Sekunde frei durchfällt; diese findet sich aber $= 15\frac{5}{8}$.

B. Für den Fall auf einer, gegen den Horizont um

*) Sehr häufig findet man, besonders in älteren Schriften, eine Geschwindigkeit c dadurch gegeben, daß man die Fallhöhe h giebt, welche ein Körper durchfallen muß, um (ohne Anfangs-Geschwindigkeit) diese Geschwindigkeit c zu erlangen. Dann muß also $c = 2\sqrt{gh}$ erst berechnet werden.

den Winkel α geneigten schiefen Ebene, findet man aber genau dieselben Gleichungen, nur daß $g \cdot \sin\alpha$ statt g geschrieben werden muß. Man hat also

$$\text{I. } v = c + 2gt \cdot \sin\alpha \quad \text{und} \quad \text{II. } s = ct + gt^2 \cdot \sin\alpha.$$

Nimmt man nun wieder die Anfangs-Geschwindigkeit $c = 0$, und schreibt man dann l statt s, so wird

$$1)\ v = 2gt \sin\alpha, \qquad 2)\ l = gt^2 \cdot \sin\alpha$$

und $$3)\ v = 2\sqrt{gl \cdot \sin\alpha}.$$

Es verhalten sich also auch bei dieser Bewegung (d. h. bei dem Fall auf der schiefen Ebene) die Geschwindigkeiten wie die Zeiten, — die Räume wie die Quadrate der Zeiten — und die Geschwindigkeiten wie die Quadrat-Wurzeln aus den Räumen.

Ist Fig. 25. $BE = h$ die Höhe, und $BA = l$ die Länge der schiefen Ebene, so daß $\sin\alpha = \frac{h}{l}$ ist; und berechnet man sich die Zeit und die Geschwindigkeit, welche der Atom (oder ein Körper) braucht und respective erhält, wenn er die Höhe h frei, oder die Länge l auf der schiefen Ebene herunterfällt, — so findet man, daß die letztere Zeit

$$\left(= \sqrt{\frac{l}{g \cdot \sin\alpha}} = \frac{l}{h}\sqrt{\frac{h}{g}}\right)$$

größer ist als die erstere $\left(= \sqrt{\frac{h}{g}}\right)$, daß dagegen die erlangte Geschwindigkeit ($= 2\sqrt{gh}$) eine und dieselbe ist, ob der Körper die Höhe h frei, oder die Länge l auf der schiefen Ebene herunter fällt, wie auch letztere gegen den Horizont geneigt seyn mag.

Findet man aus den Formeln in A. oder in B. die Räume, welche der freie Fall oder der Fall auf der schiefen Ebene in den auf einander folgenden Sekunden durchläuft, so findet man solche bei dem freien Fall nach der Ordnung

$$= g,\ 3g,\ 5g,\ 7g,\ 9g, \cdots,$$

und bei dem Fall auf der schiefen Ebene nach der Ordnung

$$= g \cdot \sin\alpha,\quad 3g \cdot \sin\alpha,\quad 5g \cdot \sin\alpha,\quad 7g \cdot \sin\alpha,\ \text{ꝛc.}$$

d. h. diese Räume verhalten sich in beiden Fällen, wie die ungeraden Zahlen.

C. Denkt man sich den Atom (oder Körper) frei und vertikal in die Höhe geworfen mit der Anfangs-Geschwindigkeit c, so ist (nach §. 57. II.)

$$\text{I. } v = c - 2gt \quad \text{und} \quad \text{II. } s = ct - gt^2.$$

Sucht man die höchste Höhe h (und die dazu nöthige Zeit t), welche der

der Atom erreicht, so muß man $v = 0$, und h statt s setzen; dies giebt

$$t = \frac{c}{2g} \quad \text{und} \quad h = \frac{c^2}{4g};$$

vgl. §. 57. II., wo dasselbe Resultat schon gefunden ist. Fällt aber ein Körper frei diese Höhe h (ohne Anfangs-Geschwindigkeit) herunter, so findet sich die End-Geschwindigkeit

$$v = 2\sqrt{gh} = c;$$

d. h. der Körper hat dann dieselbe Geschwindigkeit c wieder, mit welcher er in die Höhe geworfen worden ist (versteht sich, alles unter der Voraussetzung, daß der Widerstand der Luft nicht in Betrachtung gezogen wird).

D. Wird aber der Atom längs der schiefen Ebene mit der Anfangs-Geschwindigkeit c in die Höhe geworfen (jedesmal ohne Reibung oder Widerstand der Luft zu berücksichtigen), so hat man:

I. $v = c - 2gt \cdot \sin\alpha$ und II. $s = ct - gt^2 \cdot \sin\alpha$.

B. Krummlinige Bewegung des Atoms in einer Ebene.

§. 60.

Die parabolische Flugbahn.

Hat ein Atom eine Anfangs-Geschwindigkeit, und treten stetig neue Kräfte hinzu in immer anderen Richtungen als die Richtung der eben vorhandenen Geschwindigkeit ist, welche Richtungen aber mit der Richtung der Anfangs-Geschwindigkeit in einer und derselben Ebene liegen, — so entsteht eine krummlinige Bahn, deren Punkte jedoch alle in derselben Ebene liegen.

Betrachten wir zunächst die einfachste der hieher gehörigen Aufgaben, nämlich den Fall, wo ein Atom von A aus (Fig. 50.) in der Richtung AD, welche mit dem Horizont AX den (Elevations-) Winkel $DAX = \alpha$ macht, mit der Geschwindigkeit c ausgeworfen wird, und nun, wo er sich auch befinden mag, stetig die Schwere $2g \cdot dt$ auf ihn wirkt, und zwar in vertikaler, mit AY paralleler Richtung.

Befindet sich der Atom zu Ende der Zeit t in M, so hat er nun eine Geschwindigkeit v in einer Richtung MT, welche die Tangente der Bahn an M ist. Diese Geschwindigkeit v zerlegt sich in zwei Seiten-Geschwindigkeiten, nämlich in $v' = v \cdot \cos\psi$

und $v'' = v \cdot \sin\psi$, wovon die eine horizontal und die andere vertikal ist, sobald nur MU horizontal gedacht und W·TMU $= \psi$ gesetzt wird. Da nun jetzt eben auf's neue die Kraft $-2g \cdot dt$ in der vertikalen Richtung MS hinzutritt, so ändert sich die horizontale Geschwindigkeit gar nicht, die vertikale vermindert sich aber um $2g \cdot dt$. — Und da dies an jeder Stelle M der Bahn von A bis B statt findet, so folgt, daß in der ganzen Bahn die horizontale Geschwindigkeit sich nie ändert also immer konstant und der horizontalen Anfangs-Geschwindigkeit $c \cdot \cos\alpha$ gleich ist *); daß aber die vertikale Geschwindigkeit sich in jedem Zeit-Theilchen dt stetig um $2 \cdot gdt$ vermindert hat. Wird also AP durch x, und PM durch y bezeichnet, so folgt

1) $v' = c \cdot \cos\alpha$ und 2) $x = ct \cdot \cos\alpha$

aus §. 56. ⊙.; und

3) $v'' = c \cdot \sin\alpha - 2gt$; 4) $y = ct \cdot \sin\alpha - gt^2$,

aus §. 57. II. oder §. 59. C.

Aus den Gleichungen 1. und 3. folgt (mit Zuziehung der 2. oder der 4.)

$$5) \quad v = \sqrt{(c^2 - 4cgt \cdot \sin\alpha + 4g^2t^2)}$$
$$= \sqrt{\left(c^2 - 4gx \cdot tg\alpha + \frac{4g^2x^2}{c^2 \cdot \cos\alpha^2}\right)} = \sqrt{(c^2 - 4gy)},$$

$$6) \quad tg\psi = \frac{c \cdot \sin\alpha - 2gt}{c \cdot \cos\alpha} = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2gx}{c^2 \cdot \cos\alpha^2},$$

so daß also Geschwindigkeit (v) und Richtung (ψ) des Projektils zu Ende einer jeden Zeit, oder auch für jeden horizontalen Abstand x, oder auch für jede gegebene Höhe y, danach berechnet werden kann.

Eliminirt man aber t aus den Gleichungen 2. und 4., so ergiebt sich

$$7) \quad y = x \cdot tg\alpha - \frac{g}{c^2 \cdot \cos\alpha^2} \cdot x^2,$$

welches die Gleichung der Bahn und die einer Parabel ist. — Aus dieser Gleichung findet sich für $y = 0$, sogleich $x = AB$, d. h. die **horizontale Wurfweite**

$$8) \quad AB = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{c^2 \cdot \sin 2\alpha}{2g}$$

in rheinischen Fußen, für $g = 15\frac{5}{8}$.

Halbirt man AB in C, so hat man auch $x = AC$, und dazu $y = CO$

*) Die Anfangs-Geschwindigkeit c, als Kraft gedacht, zerlegt sich nämlich in $c \cdot \cos\alpha$ horizontal, und $c \cdot \sin\alpha$ vertikal.

aus 7. — Dieser Werth von CO zeigt sich zugleich auch als die höchste Höhe des Wurfes *); und zwar findet sich selbige

9) $$CO = \frac{c^2 \cdot sin\,\alpha^2}{4g}.$$

Der Punkt O ist daher der Scheitel der Parabel und die beiden Zweige (der aufsteigende OA, und der niedersteigende OB) der Bahn sind einander kongruent.

Anmerkung. Dies ist die sogenannte „Theorie der parabolischen Flugbahn". Wegen des jedesmal sehr bedeutenden Widerstandes der Luft weicht aber die wirkliche Bahn einer Kanonen-Kugel von der hier so eben bestimmten himmelweit ab. Und bringt man den Widerstand der Luft in Rechnung, so gehört das Problem zu den schwierigsten, die man kennt.

Die Unvollständigkeit und Dunkelheit, mit welcher in dem vorliegenden Paragraphen dieses einfachste Problem der krummlinigen Bewegung behandelt worden ist, läßt eine vollständigere und klarere „Theorie der krummlinigen Bewegung in der Ebene" wünschen. Daher die folgenden Lehren.

§. 61.

Allgemeine Theorie der freien krummlinigen Bewegung des Atoms in einer Ebene.

Denken wir uns wieder in A (Fig. 50.) eine Anfangs-Geschwindigkeit c in der Richtung AD; durch A zwei Axen AX und AY beliebig, aber auf einander senkrecht gelegt, und $DAX = \alpha$ gegeben. — Während der Bewegung wirke fortwährend eine Kraft $\varphi \cdot dt$ in einer gegebenen Richtung, so dafs φ der Gröfse und Richtung nach ebensowohl konstant, als auch mit der Zeit selbst sich ändernd, demnach

*) Man findet dies, wenn man die Höhe y berechnet zu der Weite $x = AC + h$ und $x = AC - h$, wo dann beide, wie man auch h nehmen möge, doch immer kleiner als CO ausfallen.

Sucht man den Werth von x, welcher $\partial y_x = 0$ macht, so findet man auch $x = AC = \frac{c \cdot sin\,2\alpha}{4g}$; und so zeigt sich y selbst hier als ein Maximum, weil $\partial y_x = 0$ ist.

im Allgemeinen als Funktion der Zeit t angesehen werden mufs. Man denke sich aber diese Kraft $\varphi \cdot dt$ in $X \cdot dt$ parallel mit AX, und $Y \cdot dt$ parallel mit AY zerlegt.

Es sey nun der bewegte Atom zu Ende der Zeit t in M, so sind $AP = x$, $PM = y$ und die Bahn-Länge $AM = s$ offenbar Funktionen der Zeit t. Denkt man sich nun letztere um das unendlich kleine Stück dt wachsend, so geht der Atom von M aus nach N weiter fort; er durchläuft ein unendlich kleines Elementchen MN der Bahn, so dafs x, y, s um unendlich wenig wachsen. Diese Zuwachse bezeichnen wir bezüglich durch dx, dy, ds, und berechnen sie nach dem Taylor'schen Lehrsatz (§. 17.) und finden *)

1) $dx = \partial x_t \cdot dt$; $dy = \partial y_t \cdot dt$; $ds = \partial s_t \cdot dt$,

wo die Differential-Koefficienten ∂x_t, ∂y_t, ∂s_t Funktionen von t vorstellen, welche nach den Gesetzen der Differential-Rechnung aus den Funktionen x, y, s (wenn man letztere hat) auf bestimmt vorgeschriebene Weise gefunden werden können. Dabei bilden, weil der unendlich kleine Weg $ds = MN$ als geradlinig angesehen werden kann, in der Figur die Zuwachse $dx = MR$, $dy = NR$ und $ds = MN$ ein rechtwinkliges Dreieck, so dafs man

2) $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, also auch $\partial s_t = \sqrt{\partial x_t^{\,2} + \partial y_t^{\,2}}$

und

3) $\frac{dx}{ds} = \frac{\partial x_t}{\partial s_t} = \cos\psi$ und $\frac{dy}{ds} = \frac{\partial y_t}{\partial s_t} = \sin\psi$

hat, wenn ψ den Winkel NMR vorstellt, den die Tangente MT mit der AX, oder mit MR macht.

Der Atom hat in M eine Geschwindigkeit v in der Rich-

---

*) Da nämlich t jede Zeit, und M jeden Punkt der Bahn vorstellt, so ist mit x_t, y_t, s_t für den Punkt M auch zugleich x_{t+dt}, y_{t+dt}, s_{t+dt} für den nächsten Punkt N der Bahn ausgedrückt, und man hat daher

$dx = x_{t+dt} - x_t$; $dy = y_{t+dt} - y_t$ und $ds = s_{t+dt} - s_t$.

Das übrige folgt dann aus dem Taylor'schen Lehrsatz (§. 17.).

tung der Tangente *MT* der Bahn, und diese zerlegt sich in die beiden Seiten-Geschwindigkeiten

4) $v' = v \cdot \cos\psi$ und $v'' = v \cdot \sin\psi$.

Diese Seiten-Geschwindigkeiten v' und v'' sind auch Funktionen von t, wachsen daher auch um die unendlich kleinen, durch dv' und dv'' bezeichneten Zuwachse, wenn t um dt wächst, so daſs sich nach dem Taylor'schen Lehrsatze findet

5) $dv' = \partial v'_t \cdot dt$ und $dv'' = \partial v''_t \cdot dt$.

Weil aber

6) $$v = \frac{ds}{dt} = \partial s_t$$

ist, so wird aus 3. und 4.

7) $v' = \dfrac{dx}{dt} = \partial x_t$ und $v'' = \dfrac{dy}{dt} = \partial y_t$,

also auch aus 5.

8) $dv' = \partial^2 x_t \cdot dt$ und $dv'' = \partial^2 y_t \cdot dt$;

wo auch häufig statt $\partial^2 x_t$, $\partial^2 y_t$ die gleichbedeutenden Zeichen $\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ geschrieben werden.

Diese Zuwachse dv' und dv'' der Seiten-Geschwindigkeiten sind nun aber offenbar aus den zu Ende der Zeit t neu hinzugetretenen Kräften $X \cdot dt$ und $Y \cdot dt$ hervorgegangen. Fügt man also auſser diesen letzteren Kräften $X \cdot dt$, $Y \cdot dt$ noch die Kräfte $-dv'$ und $-dv''$ d. h. (aus 8.) $-\partial^2 x_t \cdot dt$ und $-\partial^2 y_t \cdot dt$ parallel mit *AX* und *AY* gleichzeitig hinzu, so sind diese Zuwachse an Geschwindigkeiten in ihrem Entstehen wieder vernichtet, und die 4 Kräfte, nämlich $X \cdot dt$, $-\partial^2 x_t \cdot dt$ parallel mit *AX*, und $Y \cdot dt$, $-\partial^2 y_t \cdot dt$ parallel mit *AY* heben sich genau auf, halten sich also am Atom (in *M*) im Gleichgewicht. Die Bedingungen des Gleichgewichts geben aber (nach §. 4. No. 1.) die beiden Gleichungen

$$X \cdot dt - \partial^2 x_t \cdot dt = 0 \quad \text{und} \quad Y \cdot dt - \partial^2 y_t \cdot dt = 0,$$

d. h.

$$I.\ \partial^2 x_t = X \quad \text{und} \quad II.\ \partial^2 y_t = Y.$$

Diese Gleichungen *I.* und *II.*, integrirt, geben x und y in t, also auch durch Elimination von t, noch die Gleichung der Bahn zwischen x und y. — Die Gleichungen 7. geben dann v' und v''; und die Gleichungen 4. noch v und ψ d. h. die Geschwindigkeit, ihrer Gröfse und Richtung nach zu Ende einer jeden Zeit t. — Aus $v = \partial s_t$ findet sich dann auch noch $s = \int_{t \div 0} v \cdot dt = \int_{t \div 0} \sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2} \cdot dt$ dazu, während man auch noch $s = \int_{x \div 0} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx = \int_{y \div 0} \sqrt{1 + \partial x_y^2} \cdot dy$ aus der Gleichung der Bahn zwischen x und y (entweder in x oder in y ausgedrückt) finden kann.

So ist also das Problem der freien krummlinigen Bewegung des Atoms in der Ebene ganz allgemein, ganz gründlich und ganz vollständig gelöst.

Beispiel. Bei dem besonderen Problem des vorhergehenden Paragraphen ist $X = 0$, $Y = -2g$; folglich hat man

$$I.\ \partial^2 x_t = 0, \qquad II.\ \partial^2 y_t = -2g.$$

Diese Gleichungen, einmal integrirt, geben

$$\partial x_t = C \quad \text{und} \quad \partial y_t = C' - 2gt,$$

oder

$$v' = C \quad \text{und} \quad v'' = C' - 2gt;$$

wo C und C' zwei noch zu bestimmende Konstanten sind. Weil aber für $t = 0$, $v' = c \cdot \cos\alpha$ und $v'' = c \cdot \sin\alpha$ ist, so hat man $C = c \cdot \cos\alpha$ und $C' = c \cdot \sin\alpha$; also

$$I'.\ v' = \partial x_t = c \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad II'.\ v'' = \partial y_t = c \cdot \sin\alpha - 2gt.$$

Diese Gleichungen, noch einmal integrirt, geben nun weiter

$$III'.\ x = ct \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad IV'.\ y = ct \cdot \sin\alpha - gt^2;$$

welches genau die oben schon (im §. 60.) erhaltenen Resultate sind.

Anmerkung. Ganz dieselben Betrachtungen geben ganz dieselben Resultate für den Fall der freien Bewegung eines Atoms im Raume, wenn eine stetige Kraft auf ihn wirkt, welche, nach drei auf einander senkrechten Axen zerlegt, durch $X \cdot dt$, $Y \cdot dt$, $Z \cdot dt$ vorgestellt wird. Es kommt dann nur noch die dritte Gleichung *III.* $\partial^2 z_t = Z$, so wie noch $v''' = \partial z_t$ hinzu, während v''' die dritte Seiten-Geschwin-

digkeit ist, so daſs jezt $v^2 = v'^2 + v''^2 + v'''^2$ statt $v^2 = v'^2 + v''^2$ zu stehen kommt.

§. 62.

Vom mathematischen Pendel.

Wir kommen nun zu der krummlinigen Bewegung in (durch physische Banden) vorgeschriebener einfach gekrümmter (ebener) Bahn. — Wir betrachten hier aber zunächst nur den einfachsten Fall davon, wenn nämlich der Atom gezwungen ist in einem Kreise zu bleiben, und die bloße Schwere ihn treibt, in welchem Falle er ein mathematischer Pendel genannt wird.

An einem gewichtlosen und unbiegsamen Faden OM, der in O (Fig. 51.) befestigt ist, hängt in M der schwere Atom; — anfänglich, wo die Zeit t noch $=0$ ist, befinde sich OM in OA, der schwere Atom also in A, und ohne Anfangs-Geschwindigkeit; und es sey OX horizontal, OY vertikal nach unten gelegt. Zu Ende der Zeit t befinde sich der Atom in M, und es sey W·AOY $= \alpha$, W·AOM $= \alpha - \theta$, also W.MOY $= \theta$; alle diese Winkel nicht in Graden, sondern im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt; so daß wenn die Länge OM $=$ OA des Pendels durch l, und der in der Zeit t beschriebene Weg AM durch s bezeichnet wird, man hat

Bog. AMC $= l\alpha$; Bog. MC $= l\theta$ und $s = l\alpha - l\theta$.

In M habe der Atom die Geschwindigkeit v, so hat jeder Punkt des Fadens OM zwischen O und M, eine gleichzeitige Geschwindigkeit, welche desto kleiner ist, je näher derselbe dem Punkte O liegt. Denkt man sich einen Punkt m im Faden so, daß Om $= 1$ ist, so nennt man den Weg $\alpha - \theta$, welchen dieser Punkt m in der Zeit t durchläuft, den Winkelweg, und die Geschwindigkeit von m zu irgend einer Zeit t, die Winkel-Geschwindigkeit der Umdrehung (in diesem Augenblick). — Ist aber v die wahre Geschwindigkeit des Atoms in M, so ist $\frac{v}{l}$ die Winkel-Geschwindigkeit der Umdrehung zu Ende derselben

Zeit t, also in demselben Augenblick, in welchem der Faden in der Lage OM sich befindet.

Da nun (nach §. 59. B.) jeder schwere Atom auf jeder beliebig geneigten schiefen Ebene mit derselben Geschwindigkeit in jeder horizontalen Geraden ankommt, mit welcher er, dieselbe Höhe frei herabfallend angekommen seyn würde, — so folgt, daß wenn der Atom die unendliche Reihe der unendlich kleinen schiefen Ebenen durchfällt, welche den Bogen AM bilden, solcher in M dieselbe Geschwindigkeit v haben wird, die er erhält, wenn er die Höhe DQ $=$ h frei herabfällt, so daß also (nach §. 59. A.) $v = 2\sqrt{gh}$ ist, während $h = l \cdot \cos\theta - l \cdot \cos\alpha$ gefunden wird. Also ist

$$1) \qquad v = 2\sqrt{gl \cdot (\cos\theta - \cos\alpha)},$$

wo, da der Weg s oder AM durch $l\alpha - l\theta$ ausgedrückt worden ist, statt θ eine negative Zahl gesetzt werden muß, wenn M zwischen C und B, etwa in M′, zu liegen kommt.

Diese Gleichung 1. läßt sehen:

a) Die Geschwindigkeit v ist am größesten wenn $\theta = 0$ ist, d. h. wenn der Pendel am tiefsten gekommen.

b) Die Geschwindigkeit des Pendels ist genau eben so groß, ob θ negativ oder positiv, wenn nur an sich jedesmal gleich groß, genommen wird; d. h. der Pendel hat in M′, wo er dieselbe Höhe wie in M hat, auch (nach B hin) dieselbe Geschwindigkeit, die er in M (nach C hin) hatte.

c) Daher ist seine Geschwindigkeit in B, wo er mit A dieselbe Höhe erlangt, auch eben so groß wie sie in A gewesen; und da wir sie in A der Null gleich vorausgesetzt haben, so ist sie auch in B der Null gleich; d. h. eine Schwingung des Pendels ist nun beendigt.

Den in der Zeit t beschriebenen Weg s kann man nicht so bequem ohne Integral-Rechnung finden, und mit Zuziehung der letzteren auch nur dann bequem, wenn man α klein voraussetzt, so etwa daß W·AOY nicht volle zehn Grade beträgt, wo dann

$$\alpha < \frac{\pi}{18}, \text{ also } < \frac{3{,}14\cdots}{18}, \text{ d. h. } < 0{,}18$$

ist, und die vierten und höheren Potenzen von α und von θ, n den statt $\cos\alpha$ und $\cos\theta$ zu setzenden unendlichen Reihen, ohne merklichen Fehler weggelassen werden können. Unter dieser

Voraussetzung findet man aber dann ungefähr bis auf die dritte Decimalstelle genau

$$2)\qquad \theta = \alpha\cdot cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{l}}\right),$$

also

$$3)\quad s = l\alpha\cdot\left[1 - cos\left(t\sqrt{\frac{2g}{l}}\right)\right] = 2l\alpha\cdot sin\left(\tfrac{1}{2}t\sqrt{\frac{2g}{l}}\right);$$

wo man in den Anwendungen das Produkt $t\cdot\sqrt{\frac{2g}{l}}$ (während t die Zeit in Sekunden, und l die Pendel-Länge in rheinl. Fußen ausdrückt) als Bogen für den Radius 1 betrachten, nach der Proportion

$$3{,}14159 : 180^0 = t\sqrt{\frac{2g}{l}} : z^0$$

die Zahl z der Grade finden muß, um dann $cos\left(t\cdot\sqrt{\frac{2g}{l}}\right)$ d. h. $cos\, z^0$ in der trigonometrischen Tabelle auffinden und θ berechnen zu können. Dabei drückt sich (aus 2.) θ in Graden aus, so oft α in Graden ausgedrückt wird; oder es drückt sich θ im Bogen für den Radius 1 aus, wenn man α so nimmt.

Sucht man nun die Zeit $\mathfrak{T}$ der ersten Hälfte der Schwingung, so muß man in 2. $\theta = 0$ und $\mathfrak{T}$ statt t setzen und daraus $\mathfrak{T}$ berechnen. Sucht man aber die Zeit T der ganzen Schwingung, so muß man $\theta = -\alpha$ setzen, so wie T statt t (in 2.), und dann daraus T berechnen. Dies giebt

$$0 = cos\left(\mathfrak{T}\sqrt{\frac{2g}{l}}\right);\quad \text{also}\quad \mathfrak{T}\sqrt{\frac{2g}{l}} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

und

$$4)\qquad \mathfrak{T} = \tfrac{1}{2}\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{2g}};$$

ferner

$$-1 = cos\left(T\sqrt{\frac{2g}{l}}\right),\quad \text{also}\quad T\sqrt{\frac{2g}{l}} = \pi$$

und

$$5)\qquad T = \pi\cdot\sqrt{\frac{1}{2g}},$$

wo $2g\cdot dt$ die Schwere, also 2g die Geschwindigkeit vorstellt, welche sich in der ersten Sekunde des freien Falles durch die unterdessen unendlich oft und immer mit derselben Intensität gewirkt habende Schwere angesammelt hat, so daß g selbst die Zahl der rheinländischen Fuße vorstellt, welche ein frei

fallender Körper in der ersten Sekunde durchfällt, während l die Pendel-Länge in rheinischen Fußen, und $\mathfrak{T}$ und T die Zeiten in Sekunden mittlerer Zeit ausdrücken.

Man findet übrigens aus der Vergleichung von 4. und 5., daß die Dauer der beiden halben Schwingungen eine und dieselbe, nämlich die Hälfte der Dauer der ganzen Schwingung ist.

Die Gleichung 5. giebt noch

$$6) \qquad g = \tfrac{1}{2}\frac{\pi^2 l}{T^2}.$$

Läßt man daher einen mathematischen Pendel von gegebener Länge l, eine beliebige Zahl n von Sekunden lang schwingen, und zählt man die Anzahl ν der Schwingungen, so ist $T\left(=\frac{n}{\nu}\right)$ aus diesem Versuche bekannt, und die Gleichung 6. giebt dann sogleich für unsere Breiten-Grade $g = 15\frac{5}{8} = 15{,}6$.

Setzt man endlich in 5. oder 6. $T = 1$, so findet man dazu die Länge $l = \frac{2g}{\pi^2}$ des Sekunden-Pendels. Diese Länge fällt zwischen 3,1 und 3,2 rheinl. Fuß, in unseren Gegenden; wird aber gegen die Pole hin etwas länger, sowie gegen den Aequator hin etwas kürzer, weil g selbst nach den Polen hin größer, nach dem Aequator zu kleiner wird, welches letztere von der Gestalt der Erde abhängt, die an den Polen eingedrückt ist.

Anmerkung. Da in dem vorstehenden Paragraphen die Gleichung 1. nur gleichsam durch Zufall gefunden, die Gleichung 2. aber nur faktisch hingestellt und gar nicht hergeleitet worden, obgleich das Problem das einfachste unter allen hieher gehörigen gewesen ist, so soll der nächste Paragraph die vollständige und gründliche Auflösung des allgemeinen Problems liefern.

§. 63.

Allgemeine Theorie der Bewegung des Atoms in beliebig vorgeschriebener aber ebener Bahn.

Ist die Bahn *AMOB* (Fig. 50.) eine beliebig vorgeschriebene, aus welcher der Atom nie heraus kann, weil ihn physische Banden in ihr festhalten, die während der Bewegung fortwährend Drucke oder Spannungen erleiden, weil ohne sie der Atom vermöge der stetig einwirkenden Kräfte freiwillig eine ganz andere Bahn verfolgen würde, — so kön-

nen wir Alles genau so wie im §. 61. stehen lassen, nur dafs zuletzt die 4 Kräfte, nämlich $X \cdot dt$ und $-\partial^2 x_t \cdot dt$ parallel mit AX, so wie $Y \cdot dt$ und $-\partial^2 y_t \cdot dt$ parallel mit AY, sich mittelst der Festigkeit der vorgeschriebenen Bahn im Gleichgewicht halten, also dadurch, dafs sie den Atom in M senkrecht gegen die (Tangente MT der) Bahn andrücken, also in der Richtung der Normale, etwa von M nach V hin. Ist nun $N \cdot dt$ die unbekannte Gröfse dieses Druckes (der ebenfalls unendlich klein ist, während der Faktor N eine Funktion der Zeit seyn wird), so mufs dieser Druck $N \cdot dt$, aber in entgegengesetzter Richtung MW gedacht, in Verbindung mit den vorgenannten 4 Kräften den ganz frei gedachten Atom im Gleichgewicht halten (nach §. 26.). Weil aber $N \cdot dt$ nach AX und AY zerlegt in $N \cdot dt \times sin\psi$ und $-N \cdot dt \times cos\psi$ übergeht, so erhält man dasmal für die Bewegung die beiden Gleichungen

$$I. \qquad \partial^2 x_t = X + N \cdot sin\psi,$$

$$II. \qquad \partial^2 y_t = Y - N \cdot cos\psi,$$

während $sin\psi$ und $cos\psi$ bezüglich durch $\frac{dy_t}{\sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2}}$ und $\frac{\partial x_t}{\sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2}}$ ausgedrückt sind. Zu diesen Gleichungen kommt aber hier die Gleichung

$$III. \qquad f_{x,y} = 0$$

der gegebenen Bahn noch hinzu, und diese drei Gleichungen *I.* — *III.* geben dann (wenn sie aufgelöst d. h. integrirt werden) sowohl x und y als auch N, als Funktionen von t.

Wenden wir diese allgemeine Theorie auf den im §. 62. betrachteten Pendel an (Fig. 51.), wo $OP = x$, $PM = y$, $OM = l$, also die *III.* jetzt diese

$$1) \qquad x^2 + y^2 = l^2$$

ist, und bedenkt man noch, dafs hier die Normale mit dem Radius MO

zusammenfällt, daſs daher dasmal $\sin\psi = -\sin\theta$ und $\cos\psi = -\cos\theta$ ist, so erhält man statt der *I.* und *II.* jetzt (weil jetzt $X = 0$ und $Y = 2g$ ist)

$$2)\ \partial^2 x_t = -N\cdot\frac{x}{l} \quad \text{und} \quad 3)\ \partial^2 y_t = 2g - N\cdot\frac{y}{l}.$$

Um nun diese Gleichungen bequemer integriren zu können, führe man l und θ als Polar-Koordinaten ein, so hat man statt der Gleichung 1. die Bedingung, daſs l (nach t) konstant ist; und die Gleichungen

$$x = l\cdot\sin\theta, \qquad y = l\cdot\cos\theta,$$

geben daher sogleich, wenn man sie differenziirt,

$$\partial x_t = l\cdot\cos\theta\cdot\partial\theta_t; \qquad \partial y_t = -l\cdot\sin\theta\cdot\partial\theta_t;$$

$$\partial^2 x_t = +l\cdot\cos\theta\cdot\partial^2\theta_t - l\cdot\sin\theta\cdot\partial\theta_t^2;$$

$$\partial^2 y_t = -l\cdot\sin\theta\cdot\partial^2\theta_t - l\cdot\cos\theta\cdot\partial\theta_t^2.$$

Diese Werthe in die Gleichungen 2. und 3. substituirt, geben, wenn N elimirt wird, sogleich

$$4) \qquad \partial^2\theta_t = -\frac{2g}{l}\cdot\sin\theta.$$

Dies ist die Gleichung zur Bestimmung von θ, welche daher nur noch integrirt werden muſs.

Multiplicirt man nun diese Gleichung mit $\partial\theta_t$ und nimmt man links und rechts die Integrale, so erhält man

$$5) \qquad \tfrac{1}{2}\partial\theta_t^2 = \frac{2g}{l}\cdot\cos\theta + C.$$

Um die Konstante C zu bestimmen, muſs man $t = 0$ setzen, also $\theta = \alpha$, aber was? — statt $\partial\theta_t$. Bedenkt man jedoch, daſs $\alpha - \theta$ der in der Zeit t beschriebene Winkelweg (§. 62.), also (nach §. 58. *II.*) $\partial(\alpha - \theta_t)$, d. h. $-\partial\theta_t$ die Winkel-Geschwindigkeit der Drehung ist, welche wir für $t = 0$ ebenfalls der Null gleich vorausgesetzt haben, so geht die Gleichung 5. für $t = 0$ in $C = -\frac{2g}{l}\cos\alpha$ über, so daſs aus 5.

$$6)\ \partial\theta_t^2 = \frac{4g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) \quad \text{oder} \quad \partial\theta_t = -2\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}$$

wird; und dies ist die Gleichung §. 62. No. 1., sobald man bedenkt, daſs, eben weil $-\partial\theta_t$ die Winkel-Geschwindigkeit $\frac{v}{l}$ ist, daraus $v = -l\cdot\partial\theta_t$ hervorgeht.

Nimmt man nun α so klein, wie im §. 62., und setzt man $1 - \frac{1}{2}\theta^2$ statt $\cos\theta$, so wie $1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ statt $\cos\alpha$, endlich noch $\frac{1}{dt_\theta}$ statt $\partial\theta_t$, so erhält man aus 6. sogleich

$$\partial t_\theta = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}} \quad \text{oder} \quad t = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\cdot\int_{\theta\div\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}}\cdot d\theta,$$

d. h. 7) $$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \times \frac{1}{cos}\frac{\theta}{\alpha},$$

wo $\frac{1}{cos}w$ den Bogen bedeutet, dessen Kosinus $= w$ ist, so daſs man hieraus

8) $$\theta = \alpha \cdot cos\left(t \cdot \sqrt{\frac{2g}{l}}\right)$$

erhält, wie wir §. 62. No. 2. factisch hingestellt haben.

Anmerkung. Ganz analoge Betrachtungen geben ganz analoge Resultate für den Fall, daſs ein Atom im Raume sich bewegt, aber durch physische Banden gezwungen ist, entweder *a*) in einer gegebenen Fläche, oder gar *b*) in einer völlig gegebenen Bahn zu bleiben. — Man sehe das „Lehrbuch der Mechanik" Th. I. Kapp. III. und IV.

§. 64.

Von der Centrifugal-Kraft.

Ist ein Atom gezwungen (durch physische Bande) in einem Kreise zu bleiben, dessen Radius $= r$ ist, so erleidet jede Stelle der Bahn, wo er irgend eine Geschwindigkeit v hat, auch wenn man voraussetzt, was hiemit geschieht, daß gar keine Kraft (auch nicht die Schwere) weiter hinzutritt, bloß vermöge der vorhandenen Geschwindigkeit v allein einen Druck (oder eine Spannung) in der Richtung des Radius (d. h. senkrecht auf die Bahn) vom Mittelpunkt aus nach außen hin gehend. Dieser Druck wird (nicht ganz passend) Centrifugal-Kraft genannt, und solche findet sich

$$= \frac{v^2}{r} \cdot dt.$$

Dieser Druck (d. h. die Centrifugal-Kraft) ist also ebenfalls unendlich klein, verhält sich aber zur Schwere $2g \cdot dt$, wie sich die endlichen Zahlen $\frac{v^2}{r}$ und $2g$, oder $\frac{v^2}{2r}$ und g zu einander verhalten *). — Die physischen Bande, welche die Bahn bilden,

*) Die Centrifugal-Kraft $\frac{v^2}{r} \cdot dt$ ist also so groß, daß wenn solche un-

drücken oder ziehen den Atom (nach §. 26.) eben so stark in der entgegengesetzten Richtung (also nach dem Mittelpunkt hin) und dieser Gegen-Druck wird (eben so unpassend) Centripetal-Kraft genannt.

Tritt nämlich gar keine beschleunigende Kraft hinzu, wie hier vorausgesetzt ist, so muſs man, um die Gleichungen der Bewegung zu haben, in den Formeln *I. II.* des §. 63. $X = Y = 0$ setzen, während statt der dortigen *III.* hier die Gleichung des Kreises (Fig. 51.) nämlich $x^2 + y^2 = r^2$ zu stehen kommt, wenn $OP = x$ und $PM = y$ gesetzt wird. — Man bekommt daher hier die Gleichungen der Bewegung

1) $\partial^2 x_t = -N \cdot \frac{x}{r}$ und 2) $\partial^2 y_t = -N \cdot \frac{y}{r}$,

während $N \cdot dt$ offenbar die gesuchte Centrifugal-Kraft ist. Führt man daher wieder dieselben Polar-Koordinaten ein, wie im §. 63., so erhält man hier mittelst derselben Rechnungen wie dort,

3) $\partial^2 \theta_t = 0$, also $\partial \theta_t = \text{Const.}$,

während $-\partial \theta_t$ die Winkel-Geschwindigkeit der Drehung, also $v = -r \cdot \partial \theta_t$ die wahre Geschwindigkeit, mithin der Anfangs-Geschwindigkeit c gleich ist, weil die Bewegung konstant gefunden worden. Man hat also

4) $$\partial \theta_t = -\frac{v}{r} = -\frac{c}{r}.$$

Die Gleichungen 1. und 2. geben noch

5) $$N = -\frac{x \cdot \partial^2 x_t + y \cdot \partial^2 y_t}{r} = r \cdot \partial \theta_t^2;$$

also wird

6) $$N = \frac{v^2}{r}.$$

Obgleich aber hier nur für eine konstante Kreisbewegung der von der bloßen Geschwindigkeit herrührende Druck auf die

---

verändert eine volle Sekunde lang in derselben Richtung auf einen freien Atom stetig einwirkte, sich in demselben eine Geschwindigkeit ansammeln würde $= \frac{v^2}{r}$, während der Atom in dieser Sekunde einen Weg $= \frac{v^2}{2r}$ durchlaufen würde.

Bei dem Pendel (Fig. 51.) ist der Druck in M gegen die Bahn, oder die Spannung des Fadens, $= \frac{v^2}{r} \cdot dt + 2g \cdot \cos\theta \cdot dt$; der erstere Theil ist die Centrifugal-Kraft; der andere Theil $2g \cdot \cos\theta \cdot dt$ dagegen rührt von der auf's Neue hinzutretenden Schwere $2g \cdot dt$ her.

Bahn (d. h. die Centrifugal-Kraft) $= \frac{v^2}{r} \cdot dt$ gefunden worden ist, so fällt doch auch noch in die Augen

1) daß für jede veränderliche Kreisbewegung des Atoms, die Centrifugal-Kraft ebenfalls durch $\frac{v^2}{r} \cdot dt$ ausgedrückt seyn werde, weil diese veränderliche Bewegung des Atoms, welcher eben jetzt die Geschwindigkeit v hat, sobald man sich die beschleunigenden Kräfte nicht hinzutretend denkt, wie dies bei der Bestimmung der Centrifugal-Kraft seyn muß, von diesem Augenblick an konstant ist;

2) daß auch hier für jede, veränderliche oder konstante Bewegung in jeder anderen beliebigen, durch physische Bande vorgeschriebenen Bahn, der von der bloßen Geschwindigkeit v herrührende Druck auf die Bahn in der Richtung der Normale noch immer $= \frac{v^2}{r} \cdot dt$ ist, wenn man nur an jeder Stelle der Bahn statt r den Krümmungshalbmesser dieser Stelle setzt; weil man sich denken kann, daß die Bewegung in diesem Augenblick im Krümmungs-Kreise dieser Stelle statt findet.

Neuntes Kapitel.

Einleitung in die Bewegung fester Körper.

§. 65.

Durch das Gewicht des Körpers bekommen wir die Kenntniß von der Masse desselben, d. h. von der „Menge der in selbigem vorhandenen Materie" *). — Drücken wir daher die Massen und die Gewichte in Zahlen aus, die sich auf bestimmte Ein-

*) Bei den Himmels-Körpern beurtheilen wir die Massen derselben ganz analog nach der Einwirkung der Attraktion.

heiten beziehen, so verhalten sich die Massen zweier Körper, wie ihre Gewichte.

Wird die Masse eines Körpers durch die Zahl M vorgestellt, sein Gewicht aber durch die Zahl P (in Berliner Pfunden), so setzen wir immer

$$\text{I.} \qquad P = 2g \cdot M, \quad \text{also} \quad M = \frac{P}{2g}.$$

Für $M = 1$ wird also $P = 2g = 31\frac{1}{4}$; d. h. bei der Annahme der Gleichung I. ist diejenige Masse zur Massen-Einheit genommen, welche 2g oder $31\frac{1}{4}$ Berliner Pfunde wiegt.

Je mehr Masse in einem und demselben Raum (Volumen) zusammengepackt ist, desto dichter wird der Körper genannt und desto größer ist sein specifisches Gewicht. Um diese Begriffe in bestimmten Zahlen auszusprechen, so verstehen wir unter der Dichtigkeit den Quotienten aus der Masse dividirt durch das Volumen, wo die Masse in die vorhin erwähnte Massen-Einheit, das Volumen aber in rheinischen Kubikfußen ausgedrückt ist; — unter dem specifischen Gewicht eines Körpers verstehen wir aber den Quotienten aus dem (absoluten) Gewicht desselben durch das Gewicht von, eben so viel Volumen habenden reinem Wasser dividirt, so daß also hiernach das specifische Gewicht des Wassers durch die absolute Zahl 1 ausgedrückt sich sieht.

Drückt daher die Zahl D die Dichtigkeit, die Zahl δ das specifische Gewicht eines Körpers, V sein Volumen (in Kubikfußen), P sein Gewicht, M seine Masse und γ das Gewicht eines Kubukfußes reinen Wassers (in Berliner Pfunden ist $\gamma = 66$) aus, so findet sich außer der obigen I. sogleich noch

$$\text{II.} \qquad D = \frac{M}{V}, \quad \text{oder} \quad M = D \cdot V;$$

$$\text{III.} \qquad P = \gamma \cdot \delta \cdot V = 66 \cdot \delta \cdot V.$$

Die Gleichungen I. — III. geben auch noch

$$P = 2g \cdot M = 2g \cdot D \cdot V = \gamma \cdot \delta \cdot V,$$

woraus

$$\text{IV.} \qquad D = \frac{\gamma}{2g} \cdot \delta = \frac{66}{31\frac{1}{4}} \cdot \delta$$

hervorgeht. Die Dichtigkeiten sind also mit den specifischen Gewichten proportional.

Um die Formel III. zur Gewichts-Berechnung von Körpern bequem benutzen zu können, muß man noch nachstehende kleine Tabelle specifischer Gewichte beachten.

Körper.		Spec. Gew.	Körper.		Spec. Gew.
Akazienholz	0,65	0,7	Messing, Drath		8,5
Ahornholz		0,75	Nußbaumholz		0,7
Apfelbaumholz		0,8	Pappel (Schwarz-)		0,5
Basalt	2,7	2,8	— (Weiß-)		0,8
Birkenholz, frisch		0,7	Pflaumenbaumholz		0,79
— , trocken		0,8	Platin, geschmolzen		20,8
Birnbaumholz		0,66	— , gehämmert		21,3
Blei		11,3	Quarz	2,4	2,7
Buchenholz (Roth-)		0,8	Quecksilber		13,6
Eichenholz (Stein-)			Rothtanne (Fichte)		0,5
— , frisch	0,99	1,1	Salpeter		1,9
— , trocken	0,72	0,76	— , feuerbeständiger		2,7
Eisen (gegossen)	7,11	7,23	Sand		1,9
— , geschmiedet	8,2	8,3	Sandstein	1,9	2,6
Erde	1,4 bis	2,06	Schiefer		2,7
Erlenholz, frisch		0,8	Schießpulver	0,8	1,7
— , trocken		0,66	Schwefel	1,9	2,0
Eschenholz	7,2	8,4	Silber, gegossen		10,4
Gold		19,3	— , gehämmert		10,6
Granit	2,5	2,9	Stahl	7,8	8,0
Guajakholz		1,6	Steinkohlen	1,23	1,51
Kalkstein	2,2	2,7	Thon-Schiefer, Dach-		
Kiefernholz, frisch		0,72	Schiefer	2,67	3,5
— , trocken		0,62	Ulme	0,6	0,7
Kirschbaumholz		0,7	Wasserblei		4,7
Kohle (eichene)		1,57	Weidenholz	0,4	0,5
— , Holz-Kohle	0,3	0,4	Weißdorn		0,91
Kupfer, gegossen		8,7	Weißtanne		0,45
— , gehämmert		9,0	Ziegel (gebrannt)	1,4	2,2
Lindenholz		0,6	Zink (gegossen)		7,2
Marmor	2,6	2,8	— , gehämmert		7,8
Mauer mit Kalkmörtel		2,4	Zinn (gegossen)		7,3
Messing, gegossen		8,4	— , gehämmert		7,8

Alles Holz ist in dieser Tabelle, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich angegeben sich findet, trocken und vom Stamm vorausgesetzt. Holz vom Splint ist in der Regel etwas specifisch leichter, während nasses Holz, so wie Holz von der Wurzel, im Allgemeinen etwas specifisch schwerer gefunden wird.

9

§. 66.

1) Wirken auf alle Atome eines Körpers gleiche parallele Kräfte, so ist es dasselbe, wie wenn die Summe dieser Kräfte auf den Schwer-Punkt des Körpers wirkt; nach §. 13.

2) Umgekehrt also: wirkt eine Kraft (ein Stoß) auf den Schwer-Punkt eines ruhenden Körpers, so vertheilt sich diese Kraft auf die einzelnen Atome desselben dergestalt, daß sie alle von gleichen parallelen Kräften angegriffen werden; sie bewegen sich daher alle mit der dadurch erlangten gleichen und konstanten Geschwindigkeit in parallelen Richtungen fort, ohne daß einer den anderen in seiner Bewegung hinderte. Tritt dann noch stetig an jeden Atom wiederum in parallelen Richtungen eine und dieselbe stetig wirkende Kraft, z. B. die Schwere, hinzu, so ist die Bewegung eines jeden Atoms veränderlich, aber sie haben alle genau eine und dieselbe veränderliche Bewegung in parallelen Richtungen, und es stört keiner den anderen.

Wird daher (im luftleeren Raum) ein Körper geworfen durch einen Stoß, welcher den Schwer-Punkt trifft, so beschreiben alle Atome kongruente Parabeln, deren je zwei, so fern sie in einer und derselben Ebene sich befinden, sich schneiden.

3) Mit Ausnahme dieses in 2. betrachteten Falles der Bewegung eines Körpers, wird im Allgemeinen, so oft sich ein Körper bewegt, jeder einzelne Atom desselben eine eigenthümliche Geschwindigkeit und eine eigenthümliche Richtung haben. Man betrachtet dann, um die Bewegung bequemer zu übersehen, die Bewegung des Schwer-Punktes, der in jedem Augenblick eine bestimmte Geschwindigkeit v in einer bestimmten Richtung haben wird. Die Geschwindigkeit eines jeden der übrigen Atome denkt man sich dann in zwei Kräfte zerlegt, wovon die eine der Größe nach $= v$, und der Richtung nach parallel mit der augenblicklichen Geschwindigkeit v des Schwer-Punktes ist. Die andere wird dann den Atom um den Schwer-Punkt herum zu bewegen trachten, wie wenn letzterer fest und unbeweglich wäre. Jede Bewegung eines Körpers kann also betrachtet werden a) als eine

fortschreitende seines Schwer-Punktes und gleichzeitig b) als eine drehende der übrigen Atome um den Schwer-Punkt herum, wie wenn letzterer unbeweglich gedacht würde *).

4) Bei der Bewegung der Körper muß man daher betrachten

a) die fortschreitende Bewegung aller Atome in immer parallel bleibenden Richtungen, oder die fortschreitende Bewegung des Schwer-Punktes;

b) die drehende Bewegung um einen als unbeweglich gedachten Punkt **), also auch zunächst um eine als unbeweglich gedachte Axe, welche letztere jedoch in jedem Augenblick ihre Lage ändern kann.

c) die Bewegung im Allgemeinen, welche als fortschreitend und drehend zugleich angesehen werden kann.

So oft wir von der „Geschwindigkeit eines bewegten Körpers" sprechen, so oft verstehen wir die Geschwindigkeit seines Schwer-Punktes darunter.

§. 67.

Größe der Bewegung im Gegensatz zu der bewegenden Kraft.

1) Geben zwei Stöße P und P′ einer und derselben Masse, indem sie durch ihren Schwer-Punkt gehen, zwei verschiedene Geschwindigkeiten v und v′, so ist allemal

$$P:P' = v:v';$$

*) Man könnte auch eben so die fortschreitende Bewegung eines jeden anderen Atoms, der nicht der Schwer-Punkt ist, betrachten, und dann die drehende Bewegung aller übrigen Atome um diesen ersteren, selbigen als unbeweglich gedacht.

**) Man denkt sich zu dem Ende durch den Schwer-Punkt S des Körpers drei auf einander senkrechte Axen SX_1, SY_1, SZ_1, im Körper fest, so daß solche mit dem Körper zugleich sich um S drehen. Dann denkt man sich durch S noch drei solche Axen, SX′, SY′, SZ′, welche mit den im Raume festen Axen OX, OY, OZ immer parallel bleiben, wenn auch der Schwer-Punkt S sich fortbewegt; und dann bestimmt man zu Ende einer jeden Zeit t, die drei Stücke, von welchen die gegenseitige Lage dieser beiden Axen-Systeme abhängt.

d. h. die Geschwindigkeiten sind mit den Kräften, die sie hervorbringen, proportional.

2) Geben aber zwei Stöße P und P′ zweien verschiedenen Massen m und m′, die sie in ihren Schwer-Punkten treffen, eine und dieselbe Geschwindigkeit, so ist allemal

$$P:P' = m:m'.$$

d. h. die Stöße verhalten sich wie die Massen, denen sie gleiche Geschwindigkeit beibringen.

Beides folgt unmittelbar aus §. 66. Nr. 2. Daraus folgt aber sogleich:

3) Wenn zwei Stöße P und P′ zweien verschiedenen Massen m und m′, indem sie durch die Schwer-Punkte gehen, verschiedene Geschwindigkeiten v und v′ beibringen, so ist allemal

$$P:P' = mv:m'v';$$

d. h. im Allgemeinen verhalten sich die Stöße, wie die Produkte aus den Massen multiplicirt mit den Geschwindigkeiten, welche sie diesen Massen geben.

4) Nimmt man daher den Stoß P′, welcher der Massen-Einheit m′ die Einheits-Geschwindigkeit v′ beibringt, zur Stoß-Einheit *), so hat man gleichzeitig $P' = 1$, $m' = 1$, $v' = 1$, also aus vorstehender Proportion

$$P = mv;$$

und da derselbe Stoß P, am Schwer-Punkte in entgegengesetzter Richtung wirkend gedacht, diese Bewegung wieder vernichtet, so folgt, daß unter Voraussetzung dieser so eben festgesetzten Stoß-Einheit, das Produkt mv, aus der Masse m in ihre Geschwindigkeit v, allemal den Stoß ausdrückt, den sie auf einen anderen, ihr eben jetzt, wo sie diese Geschwindigkeit v hat, in den Weg kommenden Körper ausübt. — Dieses Produkt mv heißt daher die „Größe der Bewegung" oder die „Größe des Stoßes", auch das „mechanische Moment."

---

*) Diese hier ein für allemal zur Stoß-Einheit gewählte Kraft ist also der Stoß, welchen eine Masse von 2g oder 31¼ Berliner Pfunden ausübt, wenn jeder Atom die Geschwindigkeit von einem rheinl. Fuß in der Sekunde (mittlerer Zeit) hat.

5) Wird jeder Atom einer Masse m in parallelen Richtungen, ohne Geschwindigkeit zu haben, von einer (unendlich kleinen) beschleunigenden Kraft $\varphi \cdot dt$ ergriffen, so hat jeder Atom die unendlich kleine Geschwindigkeit $\varphi \cdot dt$ (welche durch einen Widerstand auch sogleich wieder vernichtet seyn kann), daher die unendlich kleine „Größe der Bewegung" $m\varphi \cdot dt$, und diese wird häufig nicht mehr Stoß, sondern Druck (Spannung, Zug) genannt.

Jeder Druck ist also unendlich klein gegen jeden Stoß, und man kann daher Druck und Stoß nie mit einander (in endlichen Zahlen) vergleichen *). Hat man aber zwei Drucke $m\varphi \cdot dt$ und $m'\varphi' \cdot dt$, so verhalten sich solche zu einander wie die endlichen Zahlen $m\varphi$ und $m'\varphi'$; also sind zwei Drucke in endlichen Zahlen mit einander zu vergleichen, obgleich jeder für sich, als Kraft angesehen, welche auf die Stoß-Einheit bezogen wird (Nr. 4.), unendlich klein ist.

6) Nimmt man als Druck-Einheit das dtfache der Stoß-Einheit (der Nr. 4.), so wird der Druck, welchen eine Masse m, auf deren Atome die beschleunigende Kraft $\varphi \cdot dt$ wirkt, in die Stoß-Einheit ausgedrückt, $= m\varphi \cdot dt$, dagegen auf die Druck-Einheit bezogen, $= m\varphi$ seyn. — Also ist der Druck, den eine Masse m, auf deren Atome die Schwere $2g \cdot dt$ wirkt, in die Stoß-Einheit ausgedrückt, $= 2gm \cdot dt$, dagegen auf die Druck-Einheit bezogen, $= 2gm$. — Da nun dieser letztere Druck nichts weiter als das Gewicht P der Masse m ist, und solches nach §. 65. I. in Berliner Pfunden ausgedrückt ebenfalls $= 2gm$ ist, so folgt, daß die hier so eben angenommene Druck-Einheit genau das Berliner Pfund ist, die Stoß-Einheit (der Nr. 4.) aber das $\frac{1}{dt}$fache desselben.

*) Wenn man diese Behauptung in der Natur nicht überall vollkommen bestätigt finden sollte, so liegt solches daran, daß es in der Natur selten vollkommene Drucke und nie vollkommene Stöße giebt. Häufig erscheint uns das als Druck, was ein Stoß ist, aber mit sehr kleiner (jedoch nicht unendlich kleiner) Geschwindigkeit. Und jeder wirkliche Stoß in der Natur wirkt stetig, wenn auch nur eine sehr kurze Zeit hindurch, und nähert sich dadurch der Kathegorie des Druckes.

Wirkt also auf jeden Atom einer Masse m die beschleunigende Kraft $\varphi \cdot dt$, so ist der dadurch hervorgebrachte Druck, wenn er auf das (Berliner) Pfund als Druck-Einheit bezogen wird, $= m\varphi$; und diese endliche in die Gewichts-Einheit ausgedrückte Zahl wird die „bewegende Kraft" genannt.

Jede „bewegende Kraft" ist also jedesmal nichts anderes als eine unendlich kleine „Größe der Bewegung", die aber in der Regel nicht auf die Stoß-Einheit bezogen wird, sondern auf das (Berliner) Pfund als Druck-Einheit, und dann in einer endlichen Zahl sich ausdrückt.

7) Es kommt nicht selten vor, daß „bewegende Kräfte" (Drucke, Zuge), z. B. ein Gewicht $= 2gM$ Berliner Pfunde, mit den (unendlich kleinen) „Größen der Bewegung" (z. B. $m \cdot dv$) verglichen werden, welche sie hervorbringen, wenn sie auf eine gegebene Masse m wirken. Dann müssen aber alle diese Kräfte, die hervorbringenden und die hervorgebrachten, in eine und dieselbe Einheit ausgedrückt werden, entweder alle in die Stoß-Einheit, so daß man (nach Nr. 6.) $2gM \cdot dt$ statt $2gM$ schreiben muß, — oder alle in die Druck-Einheit, so daß man nach derselben Nr. 6. $\frac{m \cdot dv}{dt}$ statt $m \cdot dv$ zu setzen hat.

8) Die bewegende Kraft $m\varphi$ durch die Masse m dividirt, giebt den Faktor φ der beschleunigenden Kraft $\varphi \cdot dt$. — Wirkt daher auf einen Körper von Q Pfunden (dessen Masse m also $= \frac{Q}{2g}$ ist) eine „bewegende Kraft" von P Pfunden, so erhält dadurch jeder Atom der Masse m eine „beschleunigende Kraft" $\varphi \cdot dt$, deren Faktor $\varphi = \frac{P}{m} = P : \frac{Q}{2g} = 2g\frac{P}{Q}$ ist.

Anmerkung. „Lebendige Kraft" eines bewegten Körpers nennt man das Produkt mv^2 aus der Masse m des Körpers in das Quadrat seiner augenblicklichen Geschwindigkeit v multiplicirt.

Weil aber die Betrachtung dieses Produkts mv^2 für uns hier

kein weiteres Interesse hat, so wenden wir uns lieber sogleich zu einer Anwendung der vorstehenden Lehren.

§. 68.

Vom Centralstoß zweier Körper.

I. Wenn sie unelastisch sind.

Stößt ein Körper von P Pfunden, der die Geschwindigkeit v hat, einen anderen Körper von P′ Pfunden, der die Geschwindigkeit v′ hat (in derselben Richtung wie v), central (d. h. so, daß die beiden Schwer-Punkte und die Richtungen ihrer Geschwindigkeiten in eine und dieselbe Gerade fallen), so ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit u der beiden nach dem Stoße vereinigt bleibenden Körper zu berechnen aus der Gleichung

$$u = \frac{Pv + P'v'}{P + P'},$$

wo $v' = 0$ oder negativ genommen werden muß, wenn der zweite Körper ruht, oder dem ersteren gerade entgegenkommt.

Sind nämlich m und m′ die Massen dieser Körper, so hat man $m = \frac{P}{2g}$ und $m' = \frac{P'}{2g}$; ihre „Größen der Bewegung" sind dann bezüglich $m \cdot v$ und $m' \cdot v'$, und diese Kräfte bilden die Kraft $mv + m'v'$, womit die Gesammt-Masse $m + m'$ begabt ist, also die „Größe der Bewegung" der Gesammt-Masse $m + m'$. Da nun die „Größe der Bewegung" durch die Masse dividirt die Geschwindigkeit giebt, so wird $u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$, oder, wenn man Zähler und Nenner mit 2g multiplicirt, u gerade so wie oben gefunden.

II. Wenn die Körper vollkommen elastisch sind; d. h. wenn die durch den Stoß zusammengedrückten Körper, dadurch daß sie ihre alte Gestalt wieder annehmen wollen, den empfangenen Stoß vollständig wieder zurück geben.

Sind die Körper, welche sich concentrisch stoßen, (Kugeln und) vollkommen elastisch, so bleiben sie beisammen bis sie am meisten zusammengedrückt sind, und sie haben dann die in I. berechnete gemeinschaftliche Geschwindigkeit u. — Der Körper P

hat also nun durch das Zusammendrücken die Geschwindigkeit $v - u$ verloren; und dieselbe Geschwindigkeit verliert er nun noch einmal vermöge der elastischen Rückwirkung; er hat also nun die Geschwindigkeit

$$V = u - (v - u) = 2u - v = \frac{Pv + P'(2v' - v)}{P + P'}.$$

Der andere Körper P' hat gewonnen die Geschwindigkeit $u - v'$, und dieselbe gewinnt er also noch einmal vermöge der elastischen Rückwirkung; also ist dessen Geschwindigkeit

$$V' = 2u - v' = \frac{P(2v - v') + P'v'}{P + P'}.$$

Anmerkung. Eine neue Anwendung der vorstehenden Lehren findet man in der Theorie der Attwood'schen Fallmaschine, wo auf beiden Seiten einer massenlosen Rolle Gewichte P und Q hängen, und wo nun die Ueberwucht $P - Q$ die Kraft ist, welche (ohne Reibung zu beachten) auf die Gesammtmasse von $P + Q$ Pfunden stetig wirkt, also jeder Atom eine beschleunigende Kraft von $= 2g\frac{P - Q}{P + Q}$ erhält, nach §. 67. Nr. 8.

Statt aller solcher vereinzelten Anwendungen ziehen wir es aber vor, sogleich den einzigen Satz hinzustellen, welcher die ganze Dynamik fester Körper in sich schließt.

Zehntes Kapitel.

Allgemeines Gesetz der Bewegung fester Körper und einige von dessen Anwendungen.

§. 69.

Das d'Alembert'sche Princip.

Wenn auf einzelne Stellen eines festen Körpers Kräfte wirken, so setzen sie nicht nur diese, sondern auch alle anderen Stellen des Körpers in (eine geänderte) Bewegung, und es scheint beim ersten Anblick schwierig zu

seyn, diese Einwirkung auf die einzelnen Atome gehörig zu bestimmen. Mit Hülfe des nachstehenden allgemeinen Gesetzes ist aber die Bewegung eines jeden einzelnen Atoms mit der größten Einfachheit zu verfolgen; denn es werden mittelst desselben alle Lehren der Dynamik auf die schon bekannten Lehren der Statik zurückgebracht.

Wirken auf einige, auf mehrere oder auf alle Theile eines festen Körpers oder eines losen Systems von Körpern, Kräfte ein, entweder „Größen der Bewegungen" (Stöße) oder „bewegende Kräfte" (Drucke oder Anziehungen); und ist der Körper vorher entweder in Ruhe oder bereits in Bewegung; — so werden diese Einwirkungen in Verbindung mit dem (festen oder doch gegebenen) Zusammenhang der Atome unter sich, jedem Atom eine, in der Regel unbekannte aber bestimmte (endliche oder unendlich kleine) Geschwindigkeit in einer bestimmten Richtung geben. Diese von jedem Atom gewonnene Geschwindigkeit giebt aber, im Falle der Körper schon in Bewegung gewesen ist, mit der schon vorhandenen Geschwindigkeit desselben Atoms (durch Addition, Subtraktion oder, bei verschiedenen Richtungen, mittelst des Kräften-Parallelogramms) in Verbindung, die neue Geschwindigkeit dieses Atoms, der Größe und Richtung nach. Denkt man sich nun nicht die letztere, sondern die kurz vorher erwähnte von jedem Atom gewonnene Geschwindigkeit an demselben als Kraft in genau entgegengesetzter Richtung angebracht, so tritt der alte Zustand wieder ein, wie er vor der letzten Einwirkung gewesen ist (sey es Ruhe, sey es Bewegung), und es halten sich also die eingewirkt habenden Kräfte, welche man gewöhnlich die verlorenen nennt, mit den letzteren, gewonnenen Kräften, sobald solche in genau entgegengesetzter Richtung genommen (und dann ebenfalls verlorene Kräfte genannt) werden, am Körpersystem selbst das Gleichgewicht. — Schreibt man daher die Bedingungs-Gleichungen dieses Gleichgewichts hin, so hat man die Gleichungen der Bewegung.

Dieser Satz, der von selbst in die Augen fällt, wird auch das „d'Alembert'sche Princip" genannt.

Besonders wichtig ist es aber, zu bemerken, daß diese beiden Gattungen verlorener Kräfte (nämlich die eben zu Ende der

Zeit t auf's Neue) eingewirkt habenden, und dann die durch diese Einwirkung von den einzelnen Massentheilchen gewonnenen, aber in entgegengesetzter Richtung gedachten Kräfte) sich vermöge der Festigkeit des gedachten Körpersystems vernichten, daß also ihr Gleichgewicht allein es ist, welches die augenblicklich in dem bewegten Körpersystem vorhandenen Drucke (Spannungen, 2c.) hervorbringt. Diese Drucke (Spannungen, 2c.) ergeben sich also aus demselben Gleichgewicht aller verlorenen Kräfte, genau auf dieselbe Art, wie solches in den früheren Kapiteln der Statik in den einzelnen Fällen näher bestimmt worden ist.

Man kann dieses Princip selbst auf die Bewegung eines einzigen Atoms anwenden, wie solches in den §. §. 61. und 63. geschehen ist.

Bei der Anwendung dieses Principes auf die Bewegung eines freien festen Körpers bekommt man (nach §. 47. oder §. 48.) sechs Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts, welche also jetzt die Gleichungen sind, aus welchen erstlich die drei Koordinaten-Werthe des Schwer-Punktes des Körpers, wie sie zu jeder Zeit t seyn werden, hervorgehen, dann aber noch die drei anderen in der Note zu §. 66. Nr. 4. b. näher beschriebenen Stücke gefunden werden, von denen die Drehung des Körpers um seinen Schwer-Punkt abhängt.

§. 70.

Indem wir hinsichtlich dieser freien Bewegung eines Körpers auf das „Lehrbuch der Mechanik" Th. III. verweisen, wollen wir hier nur solche Beispiele betrachten, in denen ein Körper um eine feste und unbewegliche Axe sich drehen kann.

Bei einer solchen Voraussetzung bekommt man, wenn zu gleicher Zeit das beherzigt wird, was in der Schluß-Anmerkung zum 6ten Kapitel gesagt worden, nur drei Gleichungen des Gleichgewichts; nämlich 1) die Summe der statischen Momente aller Kräfte die sich im Gleichgewicht halten sollen, nebst dem statischen Momente der Reibung am Zapfen oder Bolzen um welchen die Drehung erfolgt (diese statischen Momente nach §. 48. in Bezug auf die Dreh-Axe genommen), der Null gleich; und 2) die Summe der Projektionen aller sich im Gleichgewicht haltender Kräfte (mit Einschluß des Druckes auf die Dreh-Axe und

der Reibung am Zapfen oder Bolzen) auf zwei Gerade, welche auf der Dreh-Axe senkrecht gedacht werden (jede solche Projektions-Summe einzeln) der Null gleich.

Und wird keine Reibung berücksichtigt, so sind die letzteren beiden Gleichungen, welche nur Richtung und Größe des in demselben Augenblick vorhandenen Druckes auf die Axe bestimmen, ebenfalls überflüssig.

§. 71.

An einer Stange OB (Fig. 52.), deren Masse nicht berücksichtigt werden soll, und welche sich um O ohne Reibung und ohne alle weitere Hindernisse drehen kann, ist eine kleine, dem Volumen nach nur als ein Punkt anzusehende Masse m, in der Entfernung r von O, angebracht, deren Gewicht etwa dadurch vernichtet seyn mag, daß die Stange auf einem horizontalen Tische aufliegt, also in dieser horizontalen Ebene um O (ohne alle Reibung oder sonstige Hindernisse) sich drehen kann. Ein Stoß M·V (der von einer Masse M herrührt, welche die Geschwindigkeit V hat, aber unmittelbar nach dem Stoße zurückgehalten wird) trifft den Punkt B der Stange in der Richtung BC unter dem Winkel OBC $= \alpha$. Man soll die Anfangs-Geschwindigkeit dieser Drehung bestimmen.

Es sey ω die gesuchte Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit (§. 62.), so ist rω die Geschwindigkeit der Masse m, und mrω (nach §. 67. Nr. 4.) die durch den Stoß „gewonnene Kraft". Die „verlorene Kraft" ist M·V. — Erstere in entgegengesetzter Richtung gedacht (also immer noch senkrecht auf die Stange OB) muß also letzterer das Gleichgewicht halten, an dem durch diese Stange gebildeten geradlinigen Hebel. Also hat man (nach §. 36.), wenn OB = R gesetzt und keine Reibung berücksichtigt wird,

$$MVR \cdot \sin\alpha = mr^2 \cdot \omega,$$

woraus folgt

$$\omega = \frac{MVR . \sin\alpha}{mr^2}.$$

Man soll ferner die Winkel-Geschwindigkeit derselben Drehung, unter genau denselben Voraussetzungen finden, aber nicht wie sie zu Anfang, sondern zu Ende der Zeit t seyn wird.

Die Winkel-Geschwindigkeit der Drehung mag zu Ende der Zeit t

seyn so groß sie will, so kann sie doch unmittelbar hernach um das unendlich kleine Stück ε gewachsen seyn; dann ist die wahre Geschwindigkeit von m um $r\varepsilon$ und die „Größe der Bewegung" von m um $mr\varepsilon$ gewachsen, wo ε unendlich klein ist. Dies ist also die, unmittelbar nach der Zeit t „gewonnene Kraft". — Die zu Ende der Zeit t neu hinzugetretene Kraft, welche die „verlorene" seyn würde, existirt nach den hier gemachten Voraussetzungen, dasmal gar nicht. — Also hält sich $mr\varepsilon$ am Hebel allein das Gleichgewicht; und dies giebt

$$mr^2\varepsilon = 0, \quad \text{also} \quad \varepsilon = 0;$$

d. h. die Winkel-Geschwindigkeit wächst gar nicht (und nimmt auch nicht ab, weil sonst ε negativ gefunden worden wäre). Weil aber dies zu Ende jeder Zeit t so gefunden ist, so folgt, daß die Drehung um O konstant immer mit derselben (Anfangs-) Winkel-Geschwindigkeit ω, wie sie oben gefunden worden ist, fortdauert.

Anmerkung 1. Dächte man sich statt der Stange OB einen Hebel von beliebiger Gestalt (ein Rad an der Welle z. B., oder einen Hebel von der Form der) Fig. 53., wo OB (statt der Stange) von der Länge R gedacht werden mag, und wo an B noch dieselbe Kraft M·V unter demselben Winkel OBC $= \alpha$ stoßen soll; wird dann eine Masse m in der Entfernung r vom Dreh-Punkt angebracht beliebig wo in der Ebene OBC, während diese Ebene fest ist und sich um O ohne Reibung drehen kann (ihre Masse soll aber durchaus unberücksichtigt bleiben) —, so findet sich die Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit ω dieser Drehung genau auf demselben Wege, und genau eben so wie vorher, wo m sich an der Stange OB selbst befand.

Anmerkung 2. Denkt man sich aber statt m in der Entfernung r von O Fig. 53., lieber eine andere Masse m_1 (von ebenfalls kleinem Volumen) in der Entfernung r_1 von O, so wird die Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit ω_1 der Drehung durch die Gleichung

$$\omega_1 = \frac{MVR \cdot \sin\alpha}{m_1 r_1^2}$$

bestimmt; und die jetzige Drehung ist daher genau die vorige, d. h. es ist $\omega_1 = \omega$, so oft $m_1 r_1^2 = mr^2$ ist. — Diese Produkte mr^2, $m_1 r_1^2$ nennt man Trägheits-Momente, und es ist also in dieser Aufgabe, wo keine Reibung beachtet worden ist, für die entstehende Drehung ganz einerlei, ob eine Masse m

in der Entfernung r, oder dafür lieber eine andere Masse m_1 in der Entfernung r_1 (von der Dreh-Axe) in Bewegung gesetzt werden soll, sobald nur die Trägheits-Momente beider Massen m und m_1 einander gleich sind.

Unter der Trägheit einer Masse (Materie) versteht man die Eigenschaft, welche jede Masse hat, nämlich daß es einer Kraft bedarf, um sie (die todte Masse) in Bewegung zu setzen. Da nun bei der drehenden Bewegung ohne Reibung eine und dieselbe Kraft M·V an einer und derselben Stelle auf eine und dieselbe Weise angebracht, zweien verschiedenen Massen m und m_1 eine und dieselbe Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit der Drehung beibringt, so oft die Produkte mr^2 und $m_1r_1^2$ einander gleich sind, — so ist jedes dieser Produkte mr^2, $m_1r_1^2$ gleichsam das Maaß der Erscheinung der Trägheit der Materien m und m_1 in den hier gedachten Verhältnissen. In dieser Beziehung ist die Benennung Trägheits-Moment nicht so ganz unpassend.

Wenn man aber bei einer zu bestimmenden drehenden Bewegung (die ohne Reibung statt haben soll) statt einer Masse m in der Entfernung r, eine andere (gesuchte) Masse m_1 in der (gegebenen) Entfernung r_1 setzt, indem man $m_1r_1^2 = mr^2$ oder $m_1 = \frac{mr^2}{r_1^2}$ nimmt, so nennt man dies das „Reduciren der Massen auf eine gegebene Entfernung von der Dreh-Axe, oder, wie man auch häufig sagt, auf einen gegebenen Punkt."

§. 72.

Denkt man sich einen Hebel von beliebiger Gestalt (Fig. 53.), dessen Masse aber nicht berücksichtigt werden soll, und in einer Ebene desselben beliebig viele, z. B. vier, kleine Massen m, m', m'', m''', deren Volumen nur wie Punkte angesehen werden sollen. Die Entfernungen dieser Massen von der Dreh-Axe, oder vom Dreh-Punkt O, seyen bezüglich r, r', r'', r'''. — An irgend einer Stelle B derselben Ebene, welche von O um R entfernt ist, wirke ein Stoß M·V unter dem Winkel $OBC = \alpha$ in derselben Ebene; man soll die Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit ω ganz unter denselben Voraussetzungen bestimmen, die im §. 71. gemacht worden sind.

Die „verlorene" Kraft ist hier wieder M·V. — Die von den Massen m, m′, m″, m‴ gewonnenen Kräfte sind dagegen $mr\omega$, $m'r'\omega$, $m''r''\omega$, $m'''r'''\omega$, bezüglich senkrecht auf die Entfernungen r, r′, r″, r‴. — Das Gleichgewicht der ersteren und dieser letzteren Kräfte am Hebel, die letzteren in entgegengesetzter Richtung gedacht, giebt daher (nach §. 36.), da keine Reibung seyn soll,

$$MVR \cdot \sin\alpha = mr^2\omega + m'r'^2\omega + m''r''^2\omega + m'''r'''^2\omega,$$

woraus hervorgeht

$$\omega = \frac{MVR \cdot \sin\alpha}{mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + m'''r'''^2}.$$

Aus der Winkel-Geschwindigkeit ω kann man aber leicht die wahren Anfangs-Geschwindigkeiten $r\omega$, $r'\omega$, $r''\omega$, $r'''\omega$ berechnen, welche jede einzelne der 4 Massen m, m′, m″, m‴ hat.

Gerade so wie im §. 71. findet man dann auch wieder, daß diese Bewegung um O, sobald keine weiteren Kräfte (und namentlich nicht die Gewichte der Massen) wirken, die Bewegung um O konstant und unverändert fortdauert.

Anmerkung 1. Genau dieselben Resultate würde man offenbar auch erhalten, wenn die Massen m, m′, m″, m‴ nicht gerade in einer und derselben Ebene lägen, sondern in dem körperlichen Hebel, der sich um eine durch O hindurchgehende Axe ohne Reibung dreben kann, beliebig vertheilt wären, sobald man nur unter r, r′, r″, r‴ ihre senkrechten Abstände von der Dreh-Axe versteht, wie solches aus §. 48. hervorgeht. — Die Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit der Drehung würde sich genau so finden wie kurz vorher, sobald nur der Stoß M·V in einer Ebene statt hat, welche auf der Dreh-Axe senkrecht steht, übrigens an einer Stelle B, mit OB unter dem Winkel α, während OB = R ist; und die Drehung würde auch konstant bleiben müssen, sobald man nur gar keine neuen Kräfte hinzutreten (und namentlich auch nicht die Gewichte der Massen thätig seyn) ließe (sondern diese Gewichte durch eine passende Vorrichtung fortwährend vernichtete).

Anmerkung 2. Dächte man sich einen ganz beliebigen Körper auf einem horizontalen Tische liegend, so daß sein Gewicht fortwährend vernichtet bleibt und nicht wirkt, so aber, daß er sich um eine vertikale Axe ohne alle Reibung drehen kann und

nun so gestoßen, wie wir in Anmerkung 1. gedacht haben, so würde die Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit sich finden aus der Gleichung

$$\omega = \frac{\mathrm{MVR} \cdot \sin\alpha}{\Sigma(\mathrm{mr}^2)},$$

wo m nach und nach **jedes** einzelne Massen-Theilchen des Körpers, und r dessen jedesmalige Entfernung von der Dreh-Axe bedeutet, während $\Sigma(\mathrm{mr}^2)$ die Summe aller dieser unendlich vielen Produkte mr^2 vorstellt.

Die Bewegung selber würde dabei unter den gemachten Voraussetzungen wiederum konstant seyn, so daß immerfort eine und dieselbe Winkel-Geschwindigkeit statt fände.

Die Summe $\Sigma(\mathrm{mr}^2)$ wird übrigens das Trägheits-Moment des ganzen Körpers in Bezug auf die (beliebig gedachte) Dreh-Axe, genannt. Wie solches für verschiedene Körper und verschiedene Dreh-Axen berechnet wird, wird das nächste Kapitel lehren.

Wenn wir aber bisher Anwendungen des d'Alembert'schen Princips gegeben haben, in denen Anfangs-Stöße („Größen der Bewegung") betrachtet, und die dadurch hervorgebrachten Anfangs-Geschwindigkeiten gesucht wurden, so wollen wir jetzt auch noch einige Beispiele geben, wo bloß „bewegende Kräfte" (Drucke, z. B. Gewichte, diese aber stetig) wirken. Dadurch wird jedesmal nur eine unendlich kleine Geschwindigkeit hervorgebracht; diese aber wächst nach und nach zu einer endlichen an, so daß eine beschleunigte oder verzögerte, also im Allgemeinen eine veränderliche Bewegung entsteht.

§. 73.

An einem „Rade an der Welle" (Fig. 54.), bei welchem das Rad den Halbmesser R, die Welle dagegen den Halbmesser r haben mag, hängen bezüglich die Gewichte P und P′. Es ist auf Seiten von P am Rade das Uebergewicht; die Maschine dreht sich, das Gewicht P sinkt, das andere P′ steigt; man soll das Gesetz dieser Bewegung näher bestimmen, einmal wenn die Masse der Maschine selbst nicht beachtet wird, und dann noch einmal, wenn man die Masse der Maschine beachtet, dagegen jedesmal ihr Gewicht, so wie die Reibung und die Steifigkeit der Seile nicht in Rechnung bringt.

I. Wenn die Masse der Maschine nicht beachtet werden soll.

In diesem Fall ist zu jeder Zeit t eine gewisse Winkel-Geschwindigkeit der Drehung vorhanden und diese wächst in dem nächsten unendlich kleinen Zeit-Theilchen dt um ε; also wachsen die wahren Geschwindigkeiten der Gewichte P und P′ um $R\varepsilon$ (nach unten) und $r\varepsilon$ (nach oben); daher wachsen die „Größen der Bewegung" derselben Gewichte P und P′, wenn ihre Massen bezüglich durch m und m′ bezeichnet werden (so daß man $P = 2gm$ und $P' = 2gm'$ hat), bezüglich um $mR\varepsilon$ (nach unten) und $m'r\varepsilon$ (nach oben) und dies sind daher die durch das augenblicklich sich wiederholt habende Wirken der Gewichte P und P′ hervorgebrachten (gewonnenen) Kräfte. Die verlorenen Kräfte, d. h. diese neu gewirkt habenden (auf die Stoß-Einheit bezogen, auf welche auch die gewonnenen Kräfte bezogen werden), sind $P \cdot dt$ am Rade und $P' \cdot dt$ an der Welle (nach §. 67. Nr. 7.). — Da nun diese letzteren beiden (nach unten), mit den ersteren beiden, nachdem solche in entgegengesetzter Richtung genommen sind, also mit $mR\varepsilon$ (nach oben) und $m'r\varepsilon$ (nach unten) das Gleichgewicht halten müssen (am „Rade an der Welle" d. h. am Hebel), so erhält man die Gleichung

$$(P \cdot dt - mR\varepsilon) \cdot R = (P' \cdot dt + m'r\varepsilon) \cdot r,$$

woraus

$$\varepsilon = \frac{PR - P'r}{mR^2 + m'r^2} \cdot dt = 2g \cdot \frac{PR - P'r}{PR^2 + P'r^2} \cdot dt$$

hervorgeht. Dieser Zuwachs ε an Winkel-Geschwindigkeit ist also konstant, daher die Drehung (nach §. 57.) eine gleichförmig beschleunigte; und es verhält sich ε zu dem Zuwachs $2g \cdot dt$ den die Schwere einem freien Atom giebt, wie $\frac{PR - P'r}{PR^2 + P'r^2}$ zu 1. Und da dies zu Ende einer jeden Zeit t statt findet, so folgt, daß die Umdrehung der Maschine, d. h. eines Punktes, welcher von der Dreh-Axe um die Raum-Einheit entfernt ist, genau nach dem Gesetze des freien Falles sich richtet, nur in dem Verhältniß wie

$$\frac{PR - P'r}{PR^2 + P'r^2} \left(\text{oder } \frac{mR - m'r}{mR^2 + m'r^2}\right) \text{ zu } 1$$

lang-

langsamer. Es verhalten sich also die Winkel-Geschwindigkeiten wie die dazu verwandten Zeiten, und die Winkel-Wege (§. 62.) wie die Quadrate der Zeiten.

Das Gewicht P hat jedesmal eine Geschwindigkeit, welche das R fache der gleichzeitigen Winkel-Geschwindigkeit ist, und macht den R fachen Winkel-Weg nach unten; die Geschwindigkeit von P′ ist dagegen jedesmal das r fache der gleichzeitigen Winkel-Geschwindigkeit, und der Weg von P′ ist zugleich das r fache des gleichzeitig beschriebenen Winkel-Weges. Das Gewicht P sinkt (das andere P′ steigt) also genau nach den Gesetzen des freien Falles, nur daß die gleichzeitigen Geschwindigkeiten und Wege von P und P′ bezüglich das $\frac{PR - P'r}{PR^2 + P'r^2} \cdot R$ und $\frac{PR - P'r}{PR^2 + P'r^2} \cdot r$ fache der Geschwindigkeit und des Weges eines frei fallenden Körpers sind *).

Will man bei derselben Aufgabe Differential-Rechnung anwenden, so nennt man θ den in der Zeit t beschriebenen Winkel-Weg, also dafs $\partial\theta_t$ die Winkel-Geschwindigkeit ist. Dann ist das, was so eben durch ε bezeichnet worden, nichts anderes als $d(\partial\theta_t)$, d. h. $\partial^2\theta_t \cdot dt$; und die vorhin gefundene Gleichung für ε wird daher jetzt

$$\partial^2\theta_t = 2g\frac{PR - P'r}{PR^2 + P'r^2} = 2G,$$

wenn man $\frac{PR - P'r}{PR^2 + P'r^2}g = \frac{PR - P'r}{mR^2 + m'r^2} = G$ setzt. — Durch Integration erhält man dann

$$\partial\theta_t = 2G \cdot t \quad \text{und} \quad \theta = G \cdot t^2,$$

wenn keine Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit vorausgesetzt wird, und wenn der Winkel-Weg zu Anfang Null ist, wie wir dies in dieser Aufgabe vorausgesetzt haben. — Ist nun v die Geschwindigkeit, s der Weg von P, so findet sich

$$v = R \cdot \partial\theta_t = 2GR \cdot t \quad \text{und} \quad s = R\theta = GR \cdot t^2.$$

Und sind v' und s' dasselbe für P', so findet sich noch

$$v' = r \cdot \partial\theta_t = 2Gr \cdot t \quad \text{und} \quad s' = r\theta = Gr \cdot t^2.$$

---

*) Setzt man R = r, d. h. geht das „Rad an der Welle" in eine bloße Rolle über, so hat man wieder die schon in der Anmerkung zu §. 68. betrachtete Attwood'sche Fallmaschine, und auch genau das dort bereits gefundene Resultat.

II. Wenn auch noch die Masse der Maschine berücksichtigt werden soll (aber nicht ihr Gewicht, also nicht die dadurch vermehrte Reibung, weil überhaupt die Reibung hier unberücksichtigt bleiben soll).

In diesem Falle gewinnt auch noch jedes unendlich kleine Massen-Theilchen m_1 des „Rades an der Welle", welches von der Dreh-Axe um r_1 entfernt ist, ebenfalls den Zuwachs an Geschwindigkeit $r_1\varepsilon$ und den Zuwachs an „Größe der Bewegung" $m_1r_1\varepsilon$; und es ist also nun die Gleichung zwischen den verlorenen Kräften diese:

$$(P\cdot dt - mR\varepsilon)\cdot R = (P'\cdot dt + m'r\varepsilon)\cdot r + \Sigma(m_1r_1^2\varepsilon),$$

wo das Summen-Zeichen Σ die Summe der unendlich vielen Produkte $m_1r_1^2\cdot\varepsilon$ vorstellt, für alle Massen-Elementchen, aus denen das „Rad an der Welle" besteht, während diese letzteren Produkte alle denselben Faktor ε haben, so daß derselbe herausgesetzt, also daß

$$\varepsilon\cdot\Sigma(m_1r_1^2) \quad \text{statt} \quad \Sigma(m_1r_1^2\cdot\varepsilon)$$

geschrieben werden kann. Es findet sich daher jetzt

$$\varepsilon = \frac{PR - P'r}{mR^2 + m'r^2 + \Sigma(m_1r_1^2)}\cdot dt = 2g\cdot\frac{mR - m'r}{mR^2 + m'r^2 + \Sigma(m_1r_1^2)}\cdot dt,$$

wo $\Sigma(m_1r_1^2)$ das Trägheits-Moment des „Rades an der Welle" vorstellt, welches später (§. §. 78—80.) zu finden gelehrt werden wird *).

Weil also dasmal eine größere todte Masse in Bewegung gesetzt worden war, so ist die beschleunigende Kraft ε der (Winkel-) Umdrehung auch kleiner als sie vorher gefunden worden ist.

Dieses ε ist aber nichts anderes als $\partial^2\theta_t\cdot dt$.

In folgendem Beispiel entsteht zwar veränderliche, aber nicht gerade gleichförmig beschleunigte Bewegung.

§. 74.

Der physikalische Pendel.

Ein Körper von ganz beliebiger Gestalt kann sich um eine durch O (Fig. 55.) hindurchgehende, senkrecht auf XOY

*) Da sich die Massen wie die Gewichte verhalten, so kann man überall, wo Verhältnisse (Quotienten) der Massen vorkommen, statt der Massen unbedenklich ihre Gewichte setzen.

gedachte unbewegliche Axe ohne Reibung drehen. Der Schwere überlassen hängt er dann in Ruhe, wenn sein Schwer-Punkt S in der Vertikale OY liegt. Wird der Körper nun um den Winkel $YOA = \alpha$ aufgehoben (so daſs S in OA liegt) und dann bloſs seiner Schwere überlassen, so wird er Schwingungen machen, und diese Vorrichtung ist dann ein physikalischer Pendel. — Wartet man eine Zeit t hindurch, so hat die Schwer-Punktslinie OS den Winkel $AOM = \alpha - \theta$ beschrieben, wenn der Winkel $MOY = \theta$ gesetzt wird (alle Winkel im Bogen ausgedrückt für den Radius 1); und dann ist $\alpha - \theta$ der Winkel-Weg und $\partial(\alpha - \theta)_t$ d. h. $-\partial\theta_t$ die Winkel-Geschwindigkeit dieser Drehung zu Ende der Zeit t.

Es sey nun M die Masse, P das Gewicht des schwingenden Körpers, also $P = 2gM$; ferner sey $OS = a$; endlich sey m irgend ein kleines Massen-Elementchen dieses schwingenden Körpers, welches jedes Massen-Elementchen desselben vorstellt, also sowohl jedes in der Ebene XOY liegende, als auch jedes andere; zuletzt aber sey r die senkrechte Entfernung dieses Massen-Elementchens m von der Dreh-Axe. Dann ist $\alpha - \theta$ der Winkel-Weg, $\partial(\alpha - \theta)_t$ d. h. $-\partial\theta_t$ die Winkel-Geschwindigkeit, folglich $-r \cdot \partial\theta_t$ die wahre Geschwindigkeit desselben Elementchens m zu Ende der Zeit t. In dem nun folgenden unendlich kleinen Zeit-Theilchen dt tritt das Gewicht $2gM$, oder (auf die Stoſs-Einheit bezogen) $2gM \cdot dt$ auf's Neue hinzu, in der vertikalen Richtung ST. Dies ist also die „verlorene" Kraft. Dadurch erlangt aber die wahre Geschwindigkeit $-r \cdot \partial\theta_t$ jedes Elementchens m den Zuwachs $d(-r \cdot \partial\theta_t)$ d. h. $-r \cdot \partial^2\theta_t \cdot dt$, und das Elementchen selbst einen Zuwachs an „Gröſse der Bewegung" $= -m \cdot r \cdot \partial^2\theta_t \cdot dt$. — Diese letzteren Zuwachse sind nun die „gewonnenen" Kräfte; aber in entgegengesetzter Richtung genommen sind sie die zweite Gattung der

„verlorenen" Kräfte, welche der ersteren $2gM \cdot dt$ an dem jetzigen Hebel das Gleichgewicht halten.

Dies giebt (nach §. 47. *I.* oder §. 48.) 6 Gleichungen des Gleichgewichts, darunter aber auch eine Gleichung, welche die Summe der statischen Momente der Kräfte, die sich im Gleichgewicht halten, in Bezug auf die Dreh-Axe, der Null gleich nachweist. Man erhält daher die Gleichung

$$-\Sigma(mr^2 \cdot \partial^2\theta_t \cdot dt) = 2gM \cdot dt \times a \cdot \sin\theta,$$

wo das Zeichen Σ die Summe aller dieser Ausdrücke vorstellt in Bezug auf alle Massen-Elementchen m des schwingenden Körpers. Weil aber in allen den Produkten $mr^2 \cdot \partial^2\theta_t \cdot dt$, der Faktor $\partial^2\theta_t \cdot dt$ einen und denselben Werth behält, so kann man diesen Faktor als einen gemeinschaftlichen herausrücken, also

$$\partial^2\theta_t \cdot dt \times \Sigma(mr^2) \quad \text{statt} \quad \Sigma(mr^2 \cdot \partial^2\theta_t \cdot dt)$$

schreiben, und man erhält daher

$$\partial^2\theta_t = -2g\frac{Ma}{\Sigma(mr^2)} \cdot \sin\theta,$$

wo $\Sigma(mr^2)$ das Trägheits-Moment des schwingenden Körpers in Bezug auf die Schwingungs-Axe, vorstellt.

Vergleicht man diese Gleichung mit der im §. 63. Nr. 4. für den mathematischen Pendel, dessen Länge $= l$ ist, erhaltenen Gleichung

$$\partial^2\theta_t = -\frac{2g}{l} \cdot \sin\theta,$$

so folgt, dafs dieser physikalische Pendel nicht blofs nach demselben Gesetze, sondern auch genau übereinstimmend mit dem mathematischen Pendel schwingt, dessen Länge l aus der Gleichung

$$\frac{1}{l} = \frac{M \cdot a}{\Sigma(mr^2)}, \quad \text{oder} \quad l = \frac{\Sigma(mr^2)}{M \cdot a} = \frac{\Sigma(pr^2)}{P \cdot a}$$

gefunden wird, wenn p das Gewicht des Massen-Elementchens m vorstellt.

Alles kommt daher wieder darauf zurück, das Trägheits-

Moment des schwingenden Körpers in Bezug auf die Dreh-Axe zu berechnen. Dies soll das nächste Kapitel zeigen.

In der Formel 6. des §. 62., aus welcher die Zahl g bestimmt wird, welche die Schwere ausdrückt, mufs man also statt l den hier berechneten Werth setzen, wenn man zur Bestimmung der Schwingungs-Zeit den hiesigen physikalischen Pendel hat schwingen lassen.

Anmerkung. Trägt man die hier berechnete Länge l von O aus auf der Schwer-Punkts-Linie OS ab, so dafs $OC = l$ wird, so heifst C der Mittel-Punkt der Schwingung des physikalischen Pendels. Dieser Punkt C hat die Eigenschaft, dafs wenn man durch ihn eine neue Dreh-Axe legt parallel mit der alten, durch O hindurchgehenden, — der physikalische Pendel um diese neue Dreh-Axe ganz genau eben so schwingt, wie um die alte, wenn er um denselben Winkel α, der nicht sehr grofs gedacht ist, aufgehoben wird.

Der Grund davon liegt darin, dafs für die durch C gehende Dreh-Axe, wenn CS durch a' bezeichnet wird, und das Trägheits-Moment des schwingenden Körpers in Bezug auf die durch C hindurch gehende Momenten-Axe durch $\Sigma(mr'^2)$ vorgestellt ist, allemal (nach dem folgenden Kapitel und zwar nach §. 80.) $l = a + a' = \frac{\Sigma(mr^2)}{Ma} = \frac{\Sigma(mr'^2)}{Ma'}$ gefunden wird. (M. s. d. „Lehrbuch der Mechanik" Th. III. Kap. XII.)

§. 75.

Vom ballistischen Pendel.

Man denke sich denselben Körper vertikal aufgehängt, so dafs der Schwer-Punkt S genau unter der Dreh-Axe O liegt, und mit einer Kugel, welche die Masse M und die Geschwindigkeit V hat, an einer Stelle, deren Mitte D von der Dreh-Axe um $OD = h$ abliegt, in der horizontalen Richtung DE (Fig. 55.) dagegen geschossen, so dafs $MV \cdot h$ das statische Moment dieses Schusses ist, in Bezug auf die Axe O. Nach §. 72. und §. 72. Anmerkung 2. ist dann die Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit ω der Drehung, welche

durch diesen Schufs hervorgebracht wird, bestimmt aus der Gleichung

$$1) \qquad \omega = \frac{MV \cdot h}{\Sigma(mr^2)},$$

wo $\Sigma(mr^2)$ das Trägheits-Moment des in Bewegung gesetzten Körpers (mit Einschlufs des Trägheits-Moments der darin stecken gebliebenen Kugel) vorstellt.

Um nun die ganze Bewegung zu haben, so sey zu Ende der Zeit t der Winkel-Weg YOM (Fig. 55.) dieser Bewegung $= \theta$, also $\partial\theta_t$ die Winkel-Geschwindigkeit, so ist $\partial^2\theta_t \cdot dt$ der in dem nächstfolgenden Zeit-Theilchen dt gewonnene (hier negative) Zuwachs an Winkel-Geschwindigkeit, daher $mr \cdot \partial^2\theta \cdot dt$ der von dem unendlich kleinen von der Dreh-Axe um r abstehenden Massen-Theilchen m des Pendels gewonnene Zuwachs an „Gröfse der Bewegung", also die von m „gewonnene" Kraft. Die Ursache dieser gewonnenen Kraft ist das Gewicht $P \cdot dt$ oder $2gM \cdot dt$ des Pendels, welches am Schwer-Punkte S in der vertikalen Richtung ST wirkt. Also hat man nach dem d'Alembert'schen Princip die Gleichung

$$\partial^2\theta_t \cdot \Sigma(mr^2) + 2gM \cdot a \cdot \sin\theta = 0,$$

oder

$$2) \qquad \partial^2\theta_t = -\frac{2g}{l} \cdot \sin\theta,$$

wenn

$$3) \qquad l = \frac{\Sigma(mr^2)}{Ma}$$

gesetzt wird, und dies ist wiederum genau die Gleichung No. 4. des §. 63. Multiplicirt man jedoch diese Gleichung mit $\partial\theta_t$ und nimmt man links und rechts die Integrale, dasmal aber unter der Voraussetzung dafs $\partial\theta_t = \omega$ wird für $\theta = 0$, so erhält man, weil diese Bedingung eine andere ist als die in den §.§. 62. 63. gemachte, das Integral anders wie dort, nämlich

$$4)\qquad \partial\theta_t^2 - \omega^2 = -\frac{4g}{l}(1 - \cos\theta),$$

oder, für kleine θ, weil dann $1 - \frac{1}{2}\theta^2$ statt $\cos\theta$ geschrieben wird,

$$5)\qquad \partial\theta_t^2 = \omega^2 - \frac{2g}{l}\theta^2 \text{ (für kleine } \theta),$$

woraus hervorgeht

$$\partial t_\theta = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - \frac{2g}{l}\theta^2\right)}}, \quad \text{also} \quad t = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - \frac{2g}{l}\theta^2\right)}} \cdot d\theta.$$

Dies giebt, wenn man bedenkt, dafs jetzt für $t = 0$ auch $\theta = 0$ werden mufs,

$$6)\ t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \times \frac{1}{\sin}\frac{\theta}{\omega}\sqrt{\frac{2g}{l}}, \quad \text{oder} \quad \theta = \omega \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}} \times \sin\left(t\sqrt{\frac{2g}{l}}\right),$$

wodurch die Aufgabe, unter der Voraussetzung, dafs nur kleine Schwingungen entstehen, vollständig gelöst ist. Jedoch ist auch hier der Widerstand der Luft unbeachtet geblieben.

Wollte man sich dieser Vorrichtung bedienen um die Geschwindigkeit V der abgeschossenen Kugel M im Augenblick des Einschlagens zu berechnen (in welchem Falle die Vorrichtung selbst der „ballistische" Pendel genannt wird) — so brauchte man nur bis zur Gleichung 4. zu gehen, die noch für beliebig grofse Schwingungen gilt. Ist nämlich α der aus dem Versuche bestimmte Winkel YOA, und OA die Gerade, in welcher sich der Schwer-Punkt S in dem Augenblick befindet, wo sich der Pendel am höchsten erhoben hat, wo also die Winkel-Geschwindigkeit $\partial\theta_t$, $= 0$ ist, so giebt die Gleichung 4. sogleich

$$7)\qquad \omega^2 = \frac{4g}{l} \cdot (1 - \cos\alpha).$$

Eliminirt man aber aus 7. und 1. die Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit ω, so erhält man

$$8)\qquad V = \frac{2\Sigma(mr^2)}{M \cdot h}\sqrt{\left(\frac{g}{l}(1 - \cos\alpha)\right)}.$$

Man mißt aber mittelst eines am unteren Ende des ballistischen Pendels angebrachten Bandes, welches sich bei dem Versuche aufwickelt, die Länge des zu dem Winkel α gehörigen Bogens für einen bekannten Radius, und dividirt diesen Bogen durch diesen Radius, so hat man den Winkel α selbst (im Bogen für den Radius $=1$).

§. 76.

Will man, wie wir bis jetzt gethan haben, keine andere als eine drehende Bewegung betrachten, dabei aber keine Reibung voraussetzen, damit in der Gleichgewichts-Gleichung am Hebel nicht noch das statische Moment der Reibung eingehe, sondern bloß die statischen Momente der „verlorenen" Kräfte, so kann man nach Anmerkung 2. zu §. 71. alle in Bewegung zu versetzende Massen auf einen und denselben Punkt reduciren, der von der Dreh-Axe beliebig, etwa um R entfernt seyn mag; dann aber kann man auch alle wirkenden Kräfte, welche die Bewegung (oder die Beschleunigung derselben) hervorbringen, auf denselben Punkt (am Hebel) reduciren. Dann ist an diesem Punkte eine Masse M, deren Gewicht Q Pfunde seyn mag, durch eine Kraft $=$ P Pfunde in Bewegung zu setzen. Da dasmal der Arm R der statischen Momente (in der Gleichgewichts-Gleichung der verlorenen Kräfte) derselbe ist, so kann man sich denken als träte der Fall §. 67. Nr. 8. ein, so daß eine Bewegung oder eine Beschleunigung $=\frac{P}{M}$, oder, insofern $Q = 2gM$ ist, von $2g\frac{P}{Q}$ eintritt.

Auf diese Weise lösen sich auch alle vorstehenden Probleme, in welchen drehende Bewegung um eine feste Axe betrachtet wird, und keine Reibung um die Dreh-Axe statt finden soll, ebenfalls und geben dieselben Resultate, die wir bereits gefunden haben.

Das Reduciren der Kräfte geschieht aber so: Ist eine tangentiell wirkende Kraft K von der Dreh-Axe um r entfernt, so hält sie einer im entgegengesetzten Sinne drehenden, ebenfalls tangentiell wirkenden Kraft K′, welche von der Dreh-Axe um r′ entfernt ist, das Gleichgewicht (im Falle keine Reibung be-

rücksichtigt wird, so daß das statische Moment der Reibung nicht in Anschlag kommt), wenn $K \cdot r = K' \cdot r'$ ist. Also leistet die Kraft $K' = \frac{K \cdot r}{r'}$ in der Entfernung r', wenn sie in demselben Sinne drehend gedacht wird, in welchem K dreht, genau dasselbe, was die Kraft K in der Entfernung r leistet.

Nimmt man übrigens bei den Anwendungen dieses Verfahrens allemal $R = 1$, so giebt solches sogleich die Winkel-Beschleunigung, also die Winkel-Geschwindigkeit und den Winkelweg der Drehung.

§. 77.

Um doch wenigstens ein einziges Beispiel der Anwendung des d'Alembert'schen Princips bei einer Bewegung gegeben zu haben, welche keine um eine feste Axe drehende ist, so wollen wir noch folgende Aufgabe betrachten.

Auf zwei schiefen Ebenen (Fig. 56.) AC von der Länge l und BC von der Länge l', während ihre gemeinschaftliche Höhe $CD = h$ ist, liegen zwei Gewichte P und P', die mittelst eines über C gelegten Fadens (der ohne Gewicht, ohne Steifigkeit und unausdehnbar gedacht wird) mit einander dergestalt verbunden sind, daß wenn das Gewicht P' um eine Länge S von C nach B hin sich bewegt, das Gewicht P denselben Weg S von A nach C hin machen muß. Man soll das Gesetz dieser Bewegung näher ausmitteln, unter der Voraussetzung, daß keine Reibung berücksichtigt werden soll.

Zu Ende der Zeit t, in dem unendlich kleinen Zeit-Theilchen dt wird die Geschwindigkeit beider Körper um ε, also die Größen der Bewegung von P und P' (wenn man die Massen von P und P' bezüglich durch m und m' bezeichnet, so daß man $P = 2gm$ und $P' = 2gm'$ hat) um $m\varepsilon$ und $m'\varepsilon$ vermehrt. Dies sind also die „gewonnenen" Kräfte. — Die „verlorenen" Kräfte sind $P \cdot dt$ oder $2gm \cdot dt$ bei P, und $P' \cdot dt$ oder $2gm' \cdot dt$ bei P', beide vertikal nach unten. Diese letzteren und dann die ersteren ($m\varepsilon$ und $m'\varepsilon$), aber in entgegengesetzter Richtung, also $m\varepsilon$ längs CA und $m'\varepsilon$ längs BC gedacht, müssen nun (an der Vorrichtung) einander das Gleichgewicht halten.

Ist nun S die gemeinschaftliche Spannung des Fadens, und sind N und N′ die senkrechten Drucke, welche die schiefen Ebenen bezüglich in diesem Augenblick auszuhalten haben [alle auf die Druck-Einheit bezogen, so daß dieselben nach §. 67. Nrr. 6. 7. durch S·dt, N·dt und N′·dt ausgedrückt werden müssen, sobald sie auf die Stoß-Einheit bezogen werden], — so erhält man nach §. 34. und §. 26: zwei Gleichungen zwischen P, N, S und mε; aber noch zwei Gleichungen zwischen P′, N′, S und m′ε; und wenn man aus diesen 4 Gleichungen die Unbekannten S, N und N′ eliminirt, so bleibt die Gleichung

$$P\cdot\frac{h}{l}\cdot dt + m\varepsilon = P'\cdot\frac{h}{l'}\cdot dt - m'\varepsilon \text{ *)},$$

woraus

$$\varepsilon = \frac{P'l - Pl'}{(m'+m)ll'}h\cdot dt = 2gh\frac{P'l - Pl'}{(P'+P)ll'}\cdot dt$$

hervorgeht. — Und da, wie dieser Ausdruck sehen läßt, der Zuwachs ε an Geschwindigkeit zu Ende einer jeden Zeit, konstant und derselbe bleibt, so ist die Bewegung die im §. 57. betrachtete gleichförmig beschleunigte, wie der freie Fall der Körper, nur daß die Bewegung gegen den freien Fall um so viel langsamer ist, als $h\cdot\frac{m'l - ml'}{(m+m')ll'}$ kleiner wie 1 sich zeigt.

Ist s der in der Zeit t von P' und P durchlaufene Raum, und v die zu Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit, so ist dv oder $\partial v_t\cdot dt$ das was so eben durch ε bezeichnet gewesen ist. Folglich hat man

$$\partial v_t = 2G, \quad \text{wenn} \quad g\cdot h\cdot\frac{P'l - Pl'}{(P'+P)ll'} = G$$

---

*) Da gar keine Reibung berücksichtigt werden soll, so erhält man diese Gleichung leichter, wenn man P·dt in zwei Kräfte zerlegt, die eine senkrecht auf AC, welche von der Festigkeit der schiefen Ebene ganz vernichtet wird, die andere $P\cdot\frac{h}{l}\cdot dt$, welche längs der schiefen Ebene wirkt. Geschieht das Analoge mit P′·dt, so hat man sogleich

$$P\cdot\frac{h}{l}\cdot dt + m\varepsilon = S\cdot dt = P'\cdot\frac{h}{l'}\cdot dt - m'\varepsilon.$$

gesetzt wird. Daraus folgt durch Integration

$$v = 2Gt \quad \text{und} \quad s = Gt^2,$$

während G die vorstehende Bedeutung hat.

Setzt man hier $h = l = l'$, so findet man

$$\varepsilon = 2g\frac{P' - P}{P' + P};$$

ganz so wie in der Anmerkung zu §. 68. und in der Note zu §. 73.; nur daß P′ und P hier das sind, was umgekehrt P und P′ dort; auch hat man bei der jetzigen Voraussetzung wiederum nichts anderes als die Attwood'sche Fallmaschine.

Eilftes Kapitel.

Von den Trägheits-Momenten.

Vorerinnerung.

Die Trägheits-Momente eines und desselben Körpers sind verschieden nach der Dreh-Axe (welche auch die Momenten-Axe genannt wird), in Bezug auf welche sie gefunden werden sollen. Wir wollen aber hier 1) einige allgemeine Sätze feststellen, und dann 2) die Trägheits-Momente der am gewöhnlichsten vorkommenden Körper angeben, in Bezug auf eine gegebene Axe; zuletzt aber 3) zeigen, wie dann das Trägheits-Moment in Bezug auf jede andere mit der ersteren parallele Momenten-Axe gefunden werden kann.

§. 78.

Da das Trägheits-Moment nichts weiter ist als die Summe der Produkte aus den einzelnen unendlich kleinen Massen-Theilchen des ganzen Körpers mit dem Quadrat ihrer Entfernung von der Dreh-Axe multiplicirt, so folgt sogleich für eine und dieselbe Dreh-Axe:

1) Zertheilt man den Körper in zwei, drei, vier rc. Theile, so ist das Trägheits-Moment des ganzen Körpers allemal der Summe der Trägheits-Momente aller einzelnen Theile gleich.

2) Kann man einen Körper als die Differenz zweier anderen

ansehen, so ist sein Trägheits-Moment der Differenz der Trägheits-Momente dieser anderen Körper gleich.

3) Das Trägheits-Moment aller der kleinen Theile des Körpers, welche von der Dreh-Axe gleich weit abliegen, findet man, wenn man die Summe aller dieser Massen-Theile mit dem Quadrat dieser gemeinschaftlichen Entfernung multiplicirt.

4) Legt man durch den Körper drei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen OX, OY, OZ, von denen die dritte OZ mit der Dreh-Axe zusammenfallen mag, — so wird von jedem der lattenförmigen Theile von unendlich kleiner Breite und Dicke, deren mit OZ parallele und auf XOY senkrechte Länge aber von einem Ende des Körpers bis zum anderen reicht, — das Trägheits-Moment gefunden, wenn man die Masse dieses Körpertheilchens mit dem Quadrat des Abstandes irgend einer Stelle desselben von der Dreh-Axe, multiplicirt.

5) Denkt man sich um die Dreh-Axe herum lauter Cylinder-Flächen, welche OZ zur gemeinschaftlichen Axe haben, und welche auf der Ebene XOY senkrecht stehen und letztere in concentrischen Kreisen schneiden, deren Halbmesser nach und nach immer größer werden, aber nur um unendlich wenig von einander verschieden sind, so wird das Trägheits-Moment einer solchen unendlich dünnen Schicht gefunden, wenn man die Masse dieser Schicht mit dem Quadrat der Entfernung derselben von der Dreh-Axe multiplicirt.

6) Man wird daher das Trägheits-Moment eines Körpers finden, entweder dadurch, daß man ihn in lauter solche Latten zerlegt sich denkt, wie in Nr. 4., und dann die Trägheits-Momente dieser Latten, obgleich deren unendlich viele sind, addirt; oder, daß man den Körper in lauter solche cylindrische Schichten zerlegt wie in Nr. 5. und dann die Trägheits-Momente dieser Schichten, obgleich deren unendlich viele sind, addirt. — Das Addiren geschieht in einzelnen Fällen dadurch, daß die Glieder Reihen bilden, deren Summation aus den Elementen bereits bekannt ist, außerdem aber allemal (nach §. 17. Nr. 5.) durch Integration.

7) Endlich aber kann man auch den Körper durch unendlich viele, mit den Koordinaten-Ebenen XOY, XOZ und YOZ parallele Ebenen in lauter unendlich kleine Parallelepipeda zerlegen und die Trägheits-Momente dieser letzteren addiren.

Das Parallelepipedum an irgend einer durch x, y, z gegebenen Stelle des Körpers hat die Dimensionen dx, dy, dz, daher den Inhalt $dx \cdot dy \cdot dz$ und die Masse $\varrho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$, wenn ϱ die Dichtigkeit desselben vorstellt. Seine Entfernung von der Dreh-Axe OZ ist $= \sqrt{x^2 + y^2}$; also sein Trägheits-Moment

$$= \varrho \cdot (x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz;$$

und das Trägheits-Moment des ganzen Körpers wird daher gefunden, wenn man diesen Ausdruck dreimal hinter einander integrirt; einmal nach z, zwischen den Grenzen z' und z'', welche der Körper an dieser durch x und y gegebenen Stelle in der mit OZ parallelen Dimension hat; dann nach y, zwischen den Grenzwerthen y' und y'', welche der Körper in der durch x gegebenen und mit OY parallelen Dimension hat; endlich nach x, zwischen den Grenzwerthen x' und x'' von x; alles genau nach dem Hauptsatz §. 17. No. 5. und den Anwendungen, welche davon in den §. §. 18 — 20. bei Gelegenheit der Gewichts-Bestimmungen und der Summen der Schwer-Punkts-Momente eines Körpers gemacht worden sind.

Hat man aber den Körper in solche lattenförmige Streifen zerlegt, wie in No. 4., so hat das Trägheits-Moment eines solchen Streifens die Form

$$\varphi_{x,y} \cdot dx \cdot dy;$$

die Integration nach z ist dann schon geschehen und man braucht nur noch die Integration nach y auszuführen, um das Trägheits-Moment des scheibenförmigen Körpers zu finden, der aus allen diesen Streifen besteht, welche ein und dasselbe x haben, während dann eine zweite Integration nach x die Summe der Trägheits-Momente aller dieser Scheiben, also das Trägheits-Moment des ganzen Körpers giebt.

Und ist der Körper in lauter solche cylindrische Schichten zerlegt wie in No. 5., wovon die eine den Halbmesser r, die andere den Halbmesser $r+dr$ hat; ist dabei h die Höhe der Schicht, so ist ihr Inhalt

$$= [\pi(r+dr)^2 - \pi r^2]\cdot h = 2\pi hr\cdot dr;$$

daher ihre Masse $= 2\varrho\pi hr\cdot dr$, und ihr Trägheits-Moment $= 2\varrho\pi hr^3\cdot dr$, sobald ϱ die Dichtigkeit der Schicht vorstellt. Ist nun der Halbmesser der ersten Schicht $= r''$, der der letzten Schicht $= r'$, so ist das Trägheits-Moment des ganzen cylindrischen Hohl-Körpers

$$= \int_{r' \div r''} 2\varrho\pi hr^3\cdot dr.$$

Denkt man sich die Dichtigkeit ϱ konstant, so giebt dies

$$\tfrac{1}{2}\varrho\pi h(r'^4 - r''^4);$$

und für den vollen Cylinder, wo $r'' = 0$ ist, findet sich das Trägheits-Moment, wenn seine Axe als Dreh- oder Momenten-Axe gedacht wird,

$$= \tfrac{1}{2}\varrho\pi hr'^4 = \tfrac{1}{2}M\cdot r'^2,$$

wo M die Masse des Cylinders vorstellt.

§. 79.

Auf diese Betrachtungen gestützt findet man nun:

1) Das Trägheits-Moment eines rechtwinkligen homogenen Parallelepipedums, dessen Dimensionen a, b, c sind, in Bezug auf die Kante c als Momenten-Axe, findet sich

$$= \tfrac{1}{3}\varrho abc(a^2+b^2) = \tfrac{1}{3}M(a^2+b^2),$$

wenn M die Masse des Parallelepipedums ist.

Dieses Trägheits-Moment ist also gerade so wie wenn der dritte Theil der Gesammt-Masse M, in der, der Dreh-Axe diagonal gegenüberliegenden mit letzterer parallelen Kante vereint wäre.

2) Soll das Trägheits-Moment desselben Parallelepipedums gefunden werden in Bezug auf eine Momenten-(Dreh-)Axe, welche beliebig wo mit der Kante c parallel liegt, so zerlegt man solches mittelst zweier durch diese Axe gelegter, also bezüglich mit den Ebenen ca und cb paralleler Schnitte in vier Parallelepipeda,

nimmt von jedem nach Nr. 1. das Trägheits-Moment, und addirt alle vier Resultate.

3) Das Trägheits-Moment eines senkrechten homogenen Cylinders, dessen Radius der Grundfläche $= R$, und dessen Höhe $= h$ ist (also einer Rolle, einer radförmigen Scheibe, ꝛc. ꝛc.) in Bezug auf die Axe der Figur als Momenten-Axe, wird gefunden

$$= \tfrac{1}{2}\varrho\pi h R^4 = \tfrac{1}{2}M \cdot R^2,$$

wenn M die Masse des Cylinders vorstellt.

Dieses Trägheits-Moment ist also genau eben so, wie wenn die Hälfte der Masse in einem Punkte des äußeren Umfangs concentrirt gedacht und davon das Trägheits-Moment genommen würde.

4) Das Trägheits-Moment eines Radkranzes wird gefunden, wenn man sich das Rad voll denkt und von dem Trägheits-Moment des Ganzen das Trägheits-Moment der fingirten Ausfüllung (die beide nach Nr. 3. gefunden werden können) subtrahirt. — Auf diese Weise ist es leicht, das Trägheits-Moment eines irgend wie construirten (Maschinen-) Rades dadurch zu finden, daß man die Trägheits-Momente seiner einzelnen Theile berechnet, und solche nach Umständen addirt oder subtrahirt.

5) Das Trägheits-Moment einer homogenen Kugel in Bezug auf einen ihrer Durchmesser als Momenten-Axe wird gefunden

$$= \tfrac{8}{15}\varrho\pi \cdot R^5 = \tfrac{2}{5}MR^2,$$

wenn ϱ die Dichtigkeit, R den Halbmesser und M die Masse der ganzen Kugel vorstellt.

Das Trägheits-Moment der Kugel, in Bezug auf einen ihrer Durchmesser genommen, ist also genau so wie das Trägheits-Moment eines Massen-Punktes, der um R von der Dreh-Axe entfernt ist, wenn in ihm $\tfrac{2}{5}$ der Masse M der Kugel concentrirt gedacht wird.

6) Das Trägheits-Moment eines homogenen senkrechten Kegels, dessen Grundfläche den Radius R hat, dessen Höhe h ist, dessen Dichtigkeit ϱ und dessen Masse M seyn mag, wird in Bezug auf die Axe der Figur als Dreh-Axe gefunden

$$= \tfrac{1}{10}\varrho\pi h R^4 = \tfrac{3}{10}MR^2.$$

§. 80.

1) Kennt man das Trägheits-Moment $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ eines Körpers, der die Masse M hat, in Bezug auf eine Momenten-Axe, die durch seinen Schwer-Punkt O geht (Fig. 57.), so ist sein Trägheits-Moment $\Sigma(r'^2 \cdot dM)$ in Bezug auf jede andere, z. B. durch den Punkt D gehende mit der ersteren parallele und von jener (d. h. vom Schwer-Punkt) um $OD = a$ entfernte Momenten-Axe, allemal sofort aus der Gleichung

I. $$\Sigma(r'^2 \cdot dM) = \Sigma(r^2 \cdot dM) + M \cdot a^2$$

zu berechnen.

Dieses Resultat ergiebt sich gerade zu, sobald man das Trägheits-Moment $\Sigma(r'^2 \cdot dM)$ berechnet. Legt man nämlich durch den Schwer-Punkt O Koordinaten-Axen OX und OY senkrecht auf einander und senkrecht auf die Dreh-Axe und OZ mit letzterer zusammenfallend, und sind x und y die Koordinaten-Werthe OP und Pm eines Massen-Punktes dM in m, so hat man $Om = r$, also

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Sind nun α und β die Koordinaten-Werthe OB und BD des Punktes D, wo die neue Dreh-Axe die Ebene XOY trifft, so hat man noch, weil $Dm = r'$ ist,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r'^2,$$

also

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2\alpha \cdot x - 2\beta \cdot y$$

demnach, weil $\Sigma(a^2 \cdot dM) = a^2 \Sigma(dM) = a^2 M$, ꝛc. ꝛc. ist,

$$\Sigma(r'^2 \cdot dM) = \Sigma(r^2 \cdot dM) + a^2 M - 2\alpha \cdot \Sigma(x \cdot dM) - 2\beta \cdot \Sigma(y \cdot dM).$$

Nun ist aber nach der Theorie vom Schwer-Punkt (§. 12.)

$$\Sigma(x \cdot dM) = M \cdot x_0 = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(y \cdot dM) = M \cdot y_0 = 0,$$

weil hier die Koordinaten-Werthe x_0 und y_0 des Schwer-Punktes O, beide der Null gleich sind; daher fällt der Satz in die Augen.

2) Ist daher eine Dreh-Axe vom Schwer-Punkt um a', eine andere beliebige, aber mit der ersteren parallele Dreh-Axe vom Schwer-Punkt um a'' entfernt, und sind die Trägheits-Momente des Körpers in Bezug auf diese beiden Dreh-Axen bezüglich durch $\Sigma(r'^2 \cdot dM)$ und $\Sigma(r''^2 \cdot dM)$ vorgestellt, so hat man (nach Nr. 1.)

$$\Sigma(r'^2 \cdot dM) = \Sigma(r^2 \cdot dM) + M \cdot a'^2,$$

auch

$$\Sigma(r''^2 \cdot dM) = \Sigma(r^2 \cdot dM) + M \cdot a''^2;$$

folglich

II.

II. $\Sigma(r''^2 \cdot dM) = \Sigma(r'^2 \cdot dM) + M(a''^2 - a'^2)$;
wodurch das andere Trägheits-Moment gefunden wird, sobald das eine bekannt ist.

Anmerkung. Die merkwürdigsten und wichtigsten Untersuchungen über die Trägheits-Momente können im „Lehrbuch der Mechanik" Th. III. Kap. IV. nachgelesen werden.

Dritter Abschnitt.

Die ersten Grundlehren der Hydraulik,

oder:

Einiges vom Gleichgewicht und von der Bewegung tropfbar flüssiger Körper.

Zwölftes Kapitel.

Die ersten Grundlehren der Hydrostatik.

Erste Abtheilung.

Vom Druck des still stehenden Wassers.

§. 81.

Die flüssigen Körper unterscheiden sich von den festen dadurch, daß ihre kleinsten Theile so wenig Zusammenhang unter sich haben, daß sie durch die geringste Kraft getrennt werden können. Einige flüssige Körper, die expansiv flüssigen genannt, sind so leicht zusammendrückbar, daß sie (vermöge ihrer eigenen Schwere) immer nur im zusammengedrückten Zustand uns erscheinen; und weil dieselben sehr elastisch sind, so zeigen ihre kleinsten Theile ein Bestreben sich auszudehnen, also aus einander zu gehen. — Die übrigen flüssigen Körper werden (etwas unpassend) tropfbar flüssige genannt; ihr Hauptcharakter besteht darin, daß

sie sich fast gar nicht, nämlich nur ganz unmerklich zusammendrücken lassen, daher fast immer in ihrem natürlichen Zustand uns erscheinen, und deshalb keine Expansivkraft äußern. Diese tropfbar flüssigen Körper finden ihren Repräsentanten hauptsächlich im Wasser, weshalb wir hier immer nur vom „Wasser" sprechen wollen.

§. 82.

Wir setzen hier Folgendes voraus:

1) Große und kleine Wasser-Massen, also Meere und das Wasser in einem Garten-Teich oder in einem Gefäße, bilden im Zustande des Gleichgewichts Oberflächen, welche als Theile von Kugelflächen angesehen werden können, die den Erdhalbmesser zum Radius haben.

2) Bei kleinen Theilen, z. B. bei dem Wasser in einem Garten-Teich oder in einem Gefäße, kann jedoch diese Oberfläche, im Falle des Gleichgewichts, als mit der Tangential-Ebene der Kugelfläche an dieser Stelle zusammenfallend angesehen werden. Daher sagen wir: „die Oberfläche eines still stehenden Wassers sey eben", und diese Ebene heißt der Horizont dieser Stelle. — Auf dieser Ebene ist die Richtung der Schwere (die Vertikale) allemal senkrecht.

3) In communicirenden Röhren (z. B. in einer Gießkanne) steht das Wasser, im Falle des Gleichgewichts, überall gleich hoch, d. h. in einer und derselben Horizontal-Ebene.

Rings an den Wänden herum erleidet dieser Satz wegen der Attraktion der Wände, oder wegen der größeren Attraktion der Wasser-Theile unter sich, eine Ausnahme. Besonders auffallend tritt dies in die Augen bei sogenannten Haar-Röhrchen (sehr engen Röhren).

4) In völlig verschlossenen und ganz mit Wasser angefüllten Gefäßen pflanzt sich jeder Druck, den irgend eine Stelle in irgend einer Richtung erleidet, durch alle Wassertheilchen und in jeder Richtung fort, so daß jeder Theil des Bodens, der Wände oder der Decke des Gefäßes diesen Druck empfindet, und zwar allemal senkrecht auf seine Fläche.

5) Befindet sich Wasser in einem Gefäße im Gleichgewicht, so erleidet jeder unendlich kleine Theil oder jeder unendlich schmale Streifen (der in allen seinen Theilen vom Wasserspiegel in vertikaler Richtung gleich weit, nämlich um h, entfernt ist) — mag solcher dem Boden, den Wänden, oder der Decke des Gefäßes, da wo das Wasser selbige erreicht, angehören, — einen Druck, welcher dem Gewichte einer Wassersäule gleich kommt, die den gedrückten Flächen-Theil zur Grundfläche und die Höhe h von diesem aus bis zum Wasserspiegel zur Höhe hat. Die Richtung dieses Druckes ist immer senkrecht auf die gedrückte Fläche, folglich, nach der Lage der letzteren, bald vertikal von oben nach unten, bald vertikal von unten nach oben, bald nach allen Richtungen horizontal, bald schief von oben nach unten, bald schief von unten nach oben, u. s. w.

§. 83.

Jedes größere **ebene** Stück E der (vertikalen oder schiefen) Wände eines Gefäßes wird daher an seinen verschiedenen höher oder tiefer liegenden gleichen Theilen weniger oder mehr gedrückt. Vereinigt man aber alle diese parallel mit einander (nämlich senkrecht auf die Ebene E) wirkenden Drucke in eine einzige mittlere Kraft, so kann man solche der Größe und dem Angriffs-Punkt nach mittelst der Theorie der parallelen Kräfte (§. 11.) ohne Weiteres finden. Die Größe dieser mittleren Kraft heißt der „**Druck gegen dieses ebene Stück E**"; und solcher **wird dem Gewichte einer Wassersäule gleich** **gefunden, welche die Fläche E zur Grundfläche, den Abstand des Schwer-Punktes der als homogen gedachten Figur E, vom Wasserspiegel, zur Höhe hat.** Der Angriffs-Punkt dieser mittleren Kraft heißt der **Mittelpunkt des Druckes**, und solcher liegt immer tiefer als der Schwer-Punkt der Figur E, wie die nachstehende Auseinandersetzung zeigt.

Zu dem Ende zerlegt man die Fläche E durch horizontale Gerade in unendlich viele unendlich schmale Streifen, deren Flächen-Inhalte bezüglich A_1, A_2, A_3, ꝛc. sind, und welche vom Wasserspiegel bezüglich um a_1, a_2, a_3, ꝛc. abliegen. Ist nun γ das Gewicht eines Kubikfußes Wasser, so wer-

den diese Streifen (nach §. 82. Nr. 5.) gedrückt bezüglich von den Gewichten $A_1 \cdot a_1 \cdot \gamma$, $A_2 \cdot a_2 \cdot \gamma$, $A_3 \cdot a_3 \cdot \gamma, \cdots$, die in der Mitte der Streifen angreifend gedacht werden müssen. Diese Angriffs-Punkte bilden nun eine (gerade oder doch einfach gekrümmte) Linie. Alle Punkte dieser Linie sind von den unter sich parallelen und in der Regel ungleichen Kräften $A_1 a_1 \gamma$, $A_2 a_2 \gamma$, $A_3 a_3 \gamma$, ꝛc. angegriffen; also findet sich die einzige Kraft, die dasselbe leistet, d. h. der Druck gegen E (nach §. 11.) der Summe aller dieser Kräfte gleich, also

$$= \gamma(A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \cdots) = \gamma \cdot E \cdot e,$$

wenn e den Abstand des Schwer-Punktes der homogenen ebenen Figur E vom Wasserspiegel bedeutet, weil dann (nach §. 12.)

$$A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \cdots + = E \cdot e$$

ist.

Was aber die Koordinaten-Werthe x_0, y_0 (in der Ebene E genommen und auf zwei beliebige rechtwinklige Koordinaten-Axen bezogen) ihres Angriffs-Punktes (d. h. des gesuchten Mittel-Punkts des Druckes) betrifft, so werden solche (nach §. 12.) aus den Gleichungen

1) $\gamma E e \cdot x_0 = \gamma A_1 a_1 \cdot x_1 + \gamma A_2 a_2 \cdot x_2 + \gamma A_3 a_3 \cdot x_3 + \cdots$

2) $\gamma E e \cdot y_0 = \gamma A_1 a_1 \cdot y_1 + \gamma A_2 a_2 \cdot y_2 + \gamma A_3 a_3 \cdot y_3 + \cdots$

gefunden, wenn x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; ꝛc. die Koordinaten-Werthe der mittelsten Punkte der horizontalen Streifen A_1, A_2, A_3, ꝛc. vorstellen. Dabei dividirt sich γ (das Gewicht eines Kubikfußes Wassers) überall heraus, so daß diese Formeln für alle tropfbaren Flüssigkeiten unverändert gelten.

Ist die Figur E ein Dreieck mit einer horizontalen Seite, oder ein Viereck mit zwei horizontalen Seiten (also ein Trapez oder ein schiefes Parallelogramm, oder ein Rechteck) so liegen die mittelsten Punkte aller Streifen in einer Geraden, die man dann selbst zur Koordinaten-Axe (der x z. B.) nehmen kann. Dann reicht die Gleichung 1. schon hin, um den Mittel-Punkt des Drucks zu geben, da solcher jetzt nothwendig in derselben Geraden liegt, die alle horizontale Linien von E halbirt, so daß $y_0 = 0$ wird.

Anmerkung. Dieser Druck ist, wie auch das Stück Ebene E gestaltet seyn mag, senkrecht auf die Ebene gerichtet. Ist also E nicht horizontal und auch nicht vertikal, so ist auch der Druck gegen E nicht vertikal und nicht horizontal. Man kann ihn dann (an dem Mittelpunkt des Druckes, wo er angreift) in zwei Drucke zerlegen, wovon der eine vertikal, der andere horizontal wirkt. Sind nun E_1 und E_2 bezüglich die Horizontal- und die Vertikal-Projektion der Figur E, so findet sich der (vertikale) Druck gegen die Horizontal-Ebene E_1 dem Gewichte $\gamma E \cdot e$ gleich, der (horizontale) Druck gegen die Vertikal-Ebene E_2 aber $= \gamma \cdot E_2 \cdot e$, wenn e, wie vorher, den Abstand des Schwer-

Punkts der als homogen gedachten Figur E, vom Wasserspiegel vorstellt.

§. 84.

Sucht man den Mittelpunkt des Druckes unter der Voraussetzung, daß die Ebene E gegen den Horizont um den Winkel α geneigt, und ein Rechteck ist, dessen zwei Seiten b, b horizontal liegen, während a, a die Längen der beiden anderen Seiten sind, und setzt man voraus, daß das Wasser um h Fuße über der höchsten (also um $h + a \cdot \sin\alpha$ Fuße über der niedrigsten) Seite b stehe, so findet sich der Mittelpunkt des Drucks im Rechteck E von der obersten Seite b desselben um

$$x_0 = \frac{ah + \frac{2}{3}a^2 \cdot \sin\alpha}{2h + a \cdot \sin\alpha}$$

entfernt; also um

$$x_0 = \tfrac{2}{3}a,$$

sobald die oberste Seite b des Rechtecks E gerade bis an den Wasserspiegel reicht. — In diesem letzteren Falle ist die Entfernung des Mittelpunkts des Druckes von der untersten Seite b natürlich $= \frac{1}{3}a$.

Die Größe des Druckes ist dagegen (nach §. 83.) dem Gewicht einer Wassersäule gleich, welche E zur Grundfläche, den Abstand des mittelsten Punktes dieses Rechtecks E aber, vom Wasserspiegel, zur Höhe hat.

Es sey Fig. 58. ein, das Rechteck halbirender vertikaler Querschnitt; in selbigem sey AB der Wasserspiegel, $OL = a$ die das Rechteck E halbirende Gerade, so dafs O in der obersten Seite b, L dagegen in der untersten Seite b des Rechtecks E liegt. Zieht man noch LK mit AB parallel, so hat man $\sphericalangle \cdot OLK = \alpha$, und wenn OA, DC, LB senkrecht auf AB gedacht werden, und wenn $OD = x$ genommen wird, noch $OA = h$, $LB = h + a \cdot \sin\alpha$, $DC = h + x \cdot \sin\alpha$. — Wird nun $DN = dx$ und unendlich klein genommen, so wird der bei D liegende horizontale, die Breite $DN = dx$ und den Inhalt $b \cdot dx$ habende Streifen, von dem Gewichte $\gamma \cdot (h + x \cdot \sin\alpha) \cdot b \cdot dx$ gedrückt. Also ist der Gesammt-Druck auf das ganze Rechteck E (nach §. 17. No. 5.)

$$= \int_{a \div 0} \gamma(h + x \cdot \sin\alpha) \cdot b \cdot dx = \gamma(hab + \tfrac{1}{2}a^2 b \cdot \sin\alpha).$$

Endlich giebt die Gleichung §. 83. No. 1.)

$$\gamma(hab + \tfrac{1}{2}a^2b \cdot \sin\alpha) \cdot x_0 = \int_{a \div 0} \gamma(h + x \cdot \sin\alpha)bx \cdot dx$$
$$= \gamma(\tfrac{1}{2}ha^2b + \tfrac{1}{3}a^3b \cdot \sin\alpha),$$

woraus x_0 gerade so, wie oben angegeben, hervorgeht, wo x_0 so wie x von O aus auf der OL gedacht sind.

Einige zu diesem Kapitel gehörige Beispiele.

1) Wie stark wird die feste Decke eines Gefäßes gedrückt, wenn das Wasser in einer damit communicirenden Röhre um h Fuße höher steht?

2) Wie stark, wenn auf das Wasser in letzterer noch ein Druck von P Pfunden wirkt? (Anwendung auf hydraulische Pressen.)

3) Den Abstand der horizontalen Quer-Riegel eines Schleusen-Thores zu bestimmen, damit, wenn das Wasser bis an den oberen Rand des Thores geht, die durch diese Riegel gebildeten Fächer gleichen Druck erleiden, wenn die Schleuse leer ist.

4) Die Kraft zu bestimmen, mit der ein Schutzbrett in die Höhe gezogen werden kann (wo die durch den Wasser-Druck hervorgebrachte Reibung zu überwinden ist).

5) Die Stärke einer lose aufsitzenden Mauer zu bestimmen, damit sie von einem angrenzenden still stehenden Wasser nicht umgekantet wird; sowohl wenn die Mauer parallelepipedalisch, als auch wenn sie dossirt ist. (Vgl. §. §. 120. ff.)

Zweite Abtheilung.

Von den schwimmenden Körpern.

§. 85.

1) Jeder im Wasser liegende feste Körper wird von einer Kraft vertikal in die Höhe gedrückt, welche dem Gewicht des von ihm vertriebenen Wassers gleich kommt.

Denn, Wasser an seiner Stelle würde von dem umgebenden Wasser getragen.

2) Liegt also der feste Körper zu Boden, so ist der Druck nach oben dem Gewicht des, sein ganzes Volumen einnehmenden Wassers gleich. — Schwimmt er aber, so ist der Druck nach oben dem Gewicht des Wassers gleich, welches er verdrängt, und welches das Volumen des eingetauchten Theils des Körpers (bis zum Wasserspiegel) hat. — Dieser Druck, da er von gleichen parallelen Kräften herrührt, welche jedes Theilchen des verdrängten Wassers erfassen, geht allemal (nach §. §. 12. 13.) durch den Schwer-Punkt des verdrängten Wassers.

3) Ist also das specifische Gewicht (§. 65.) eines festen Körpers >1, so wird er im Wasser zu Boden sinken; ist solches <1, so wird er auf dem Wasserspiegel schwimmen; und ist solches $=1$, so wird er an jeder Stelle im Wasser eben so ruhig liegen, als das Wasser selbst, welches er verdrängt.

4) Dividirt man das Gewicht eines festen Körpers durch sein specifisches Gewicht, so erhält man bekanntlich das Gewicht des Wassers, welches denselben Raum einnimmt (nach §. 65.); also ist dieser Quotient zugleich der vertikale Gegen-Druck des Wassers nach oben (nach Nr. 1.), also das, was man den Gewichts-Verlust des ganz im Wasser liegenden festen Körpers nennt.

5) Ein schwimmender Körper kann nur dann in Ruhe (im Gleichgewicht) seyn, wenn sein Schwer-Punkt und der Schwer-Punkt des durch ihn verdrängten Wassers in einer und derselben Vertikale liegen. — Diese durch die beiden Schwer-Punkte gehende Vertikale heißt die Schwimm-Axe des Körpers. — Diese Schwimm-Axe denken wir uns hier immer als eine im Körper feste Gerade.

6) Wird ein schwimmender Körper durch irgend eine äußere Veranlassung unendlich wenig aus dem Gleichgewicht gebracht, strebt er aber dann vermöge seiner eigenen Schwere nach derselben Gleichgewichts-Lage zurück, so heißt dieses Gleichgewicht stabil; er befindet sich in einer stabilen Schwimm-Lage. — Begünstigt er dagegen die von außen erhaltene Bewegung, so daß er nur erst bei einer anderen, von der ersteren verschiedenen

Schwimm-Axe wiederum in das Gleichgewicht (in Ruhe) geräth, so war jenes Gleichgewicht **nicht stabil**; der Körper befand sich in keiner stabilen Lage und ist **umgeschlagen**.

7) Hat ein schwimmender Körper eine stabile oder eine nicht stabile Lage; wird er aber von außen her um unendlich wenig aus seiner Gleichgewichts-Lage gebracht, so hat das nun von ihm verdrängte Wasser einen anderen Schwer-Punkt, als das von ihm vorher verdrängte, während die Schwimm-Axe, die wir in ihm fest denken, gegen den Horizont um unendlich wenig sich geneigt hat. Denkt man sich nun durch den Schwer-Punkt des neu verdrängten Wassers eine Vertikale, so wird sie diese geneigte Schwimm-Axe treffen und dieser Durchschnitts-Punkt wird das **Metacentrum** des Körpers genannt für diese Gleichgewichts-Lage in Vergleichung mit der neu angenommenen, von ersterer unendlich wenig verschiedenen Lage.

§. 86.

Ein schwimmender Körper hat nur dann, aber dann allemal eine stabile Lage, wenn sein Schwer-Punkt S tiefer liegt, als sein jedesmaliges Metacentrum C für diese Gleichgewichts-Lage in Vergleichung mit jeder anderen Lage, die von letzterer nur unendlich wenig verschieden ist.

Denn da der vertikale Gegendruck des verdrängten Wassers durch den Schwer-Punkt T des letzteren geht, so geht er auch durch das Metacentrum C. Das Gewicht des schwimmenden Körpers dagegen geht durch den Schwer-Punkt S des Körpers. Also fällt die Richtigkeit der Behauptung in die Augen, sobald man die Fig. 59. und Fig. 60. ansieht, wo in Fig. 59. das Bestreben der Kräfte in die Augen fällt, die Schwimm-Axe AB wieder in ihre vertikale Lage zurück zu versetzen, während Fig. 60. zeigt, wie dieselben Kräfte das weitere Umneigen der Schwimm-Axe hervorbringen.

Es geht zugleich noch hervor, daß wenn das Metacentrum mit dem Schwer-Punkt des Körpers zusammenfällt, der Körper in jeder dieser neuen Lagen wiederum im Gleichgewicht ist, d. h. in diesen Lagen schwimmt.

Anmerkung. Auf diese Sätze gestützt kann man nun untersuchen:

1) Wie tief gegebene Körper, die leichter als Wasser sind, im Wasser sich eintauchen, im Falle sie in der ihnen gegebenen Lage schwimmen d. h. im Gleichgewichte sind; und wie tief sie sich eintauchen, wenn sie noch belastet werden?

2) Ob sie in der ihnen gegebenen Lage überhaupt im Gleichgewicht bleiben, und unter welchen Bedingungen?

3) Ob ihr Gleichgewicht stabil ist?

Anwendungen auf die Tragfähigkeit der Pontons, den Bau der Schiffe, ꝛc.

§. 87.

Bestimmung der specifischen Gewichte.

1) Hängt man einen (in Wasser unauflöslichen) Körper, der P Pfunde wiegt, an dem einen Ende eines Wagebalkens so auf, daß er immer unter Wasser gesetzt ist, und erhält ihn dann am anderen Ende des Wagebalkens ein Gewicht von Q Pfunden im Gleichgewicht, so ist P — Q Pfunde sein Gewichts-Verlust im Wasser, d. h. das von ihm verdrängte Wasser wiegt P — Q Pfunde, also ist $\frac{P}{P-Q}$ (nach §. 65. und §. 85. Nr. 4.) sein specifisches Gewicht. — Auf diese Weise findet man also das specifische Gewicht solcher Körper, welche schwerer wie Wasser und im Wasser unauflöslich sind *).

2) Setzt man alles eben so voraus, nur daß statt Wasser eine andere Flüssigkeit genommen wird, deren specifisches Gewicht

*) Ist der Körper (der P Pfunde wiegt) leichter wie Wasser, so verbindet man damit einen anderen von S Pfunden, der um so viel schwerer ist als Wasser, daß die ganze Verbindung unter Wasser sich taucht. Wiegt dann das Ganze R Pfunde unter Wasser, so ist das Gewicht des von der Verbindung verdrängten Wassers $= P+S-R$. Ist nun F das Gewicht des Wassers, welches der Hülfs-Körper selbst verdrängt, so bleibt $P+S-R-F$ für das Gewicht des Wassers, welches der gegebene Körper von P Pfunden verdrängt. Daher ist denn $\frac{P}{P+S-R-F}$ das specifische Gewicht des gegebenen Körpers, der leichter wie Wasser, aber im Wasser unauflöslich ist.

$= \alpha$ seyn mag, welche ebenfalls leichter als der eingetauchte Körper ist und in welcher der letztere ebenfalls nicht auflöslich ist, so drückt, wenn der Körper P oder Q Pfunde wiegt, je nachdem er außerhalb oder in diese Flüssigkeit ganz eingetaucht sich befindet, die Differenz $P-Q$ das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit aus, welche α mal so viel wiegt, als Wasser. Das von dem Körper verdrängte Wasser würde also $\frac{P-Q}{\alpha}$ wiegen und daher ist jetzt

$$\delta = P : \frac{P-Q}{\alpha} = \frac{P}{P-Q} \cdot \alpha$$

das specifische Gewicht des Körpers. — So findet man also das specifische Gewicht eines Körpers, welcher zwar in Wasser, dagegen nicht in der anderen Flüssigkeit auflöslich ist, deren specifisches Gewicht α man kennt.

Umgekehrt aber: ist das specifische Gewicht δ des festen Körpers schon bekannt, so findet man auf diesem Wege sogleich das specifische Gewicht α dieser anderen Flüssigkeit, nämlich

$$\alpha = \frac{P-Q}{P} \cdot \delta;$$

wo $P-Q$ den Gewichts-Verlust des Körpers, der das Gewicht P hat, in der gedachten Flüssigkeit ausdrückt.

Ist Q' das Gewicht des unter Wasser gesetzten Körpers, dessen Gewicht außer dem Wasser $= P$ ist, so ist nach Nr. 1. $\delta = \frac{P}{P-Q'}$; folglich ist

$$\alpha = \frac{P-Q}{P-Q'},$$

wo Q' und Q die Gewichte eines und desselben Körpers sind, je nachdem er ganz in Wasser oder ganz in die Flüssigkeit getaucht ist, deren specifisches Gewicht α man finden will.

Dreizehntes Kapitel.

Die ersten Grundlehren der Hydrodynamik.

Erste Abtheilung.

Wasser-Mengen-Bestimmungen.

§. 88.

1) Ist auf dem horizontalen Boden eines Gefäßes, in welchem das Wasser immer in derselben Höhe h erhalten wird, eine Oeffnung, so fließt das Wasser mit derselben Geschwindigkeit c aus, welche ein frei fallender Körper erhält, wenn er die Höhe h herunterfällt; also daß $c = 2\sqrt{gh} = 7{,}91 \times \sqrt{h}$ ist.

Denn ist a der Quadrat-Inhalt der Oeffnung, so ist der Druck auf selbige (nach §. 83) $= ah\gamma$, wenn γ das Gewicht eines Kubikfußes Wassers ist. Dieser Druck dauert auf das ausfließende Wasser eine sehr kleine Zeit t hindurch, während welcher es einen sehr kleinen Weg s gemacht hat, stetig fort; also ist (nach §. 57.) $s = Gt^2$, $c = 2Gt$ und $c = 2\sqrt{Gs}$, wo 2G die beschleunigende Kraft ist, welche (nach §. 67. Nr. 8.) der Druck $ah\gamma$ der ausgeflossenen Masse $\frac{as\gamma}{2g}$ giebt, so daß $G = g\frac{ah\gamma}{as\gamma} = g\frac{h}{s}$ wird.

2) Dasselbe gilt auch noch für eine jede Oeffnung, die in einer Seiten-Wand angebracht ist, sobald sie von unten nach oben unendlich schmal ist und wenn unter h die Höhe des Wasserspiegels über dieser Oeffnung verstanden wird.

3) Fließt Wasser dauernd mit der Geschwindigkeit c aus einer Oeffnung von a Quadratfußen, so muß in jeder Sekunde a·c Kubikfuß Wasser ausfließen, weil in der Sekunde ein Wasser-Prisma ausfließt, welches die Grundfläche a und die Höhe c hat. Ist nun M diese in der Sekunde ausgeflossene Wasser-Menge, und c aus Nr. 1. oder Nr. 2. berechnet, so müßte seyn

$$M = 7{,}91 \times a \cdot \sqrt{h}.$$

Die Erfahrung lehrt aber, daß zwar

I. $$M = \alpha \times a \cdot \sqrt{h}$$

ist, daß aber $\alpha < 7{,}91$ genommen werden muß. Diesen Faktor α nennt man den Contraktions-Koefficienten und man verbessert schon die obige Formel für die Geschwindigkeit c (in Nrr. 1. und 2.), indem man

II. $$c = \alpha \cdot \sqrt{h}$$

nimmt, und α aus Versuchen bestimmt.

Eytelwein findet aus Versuchen

a) für Oeffnungen in dünnen Wänden $\alpha = 4{,}89$;

b) für Schutz-Oeffnungen ohne Flügelwände $\alpha = 5$;

c) für kurze Ansatzröhren $\alpha = 6{,}42$;

d) für schmale Gerinne, Schutz-Oeffnungen mit Flügelwänden, steile Einbaue, gerade Brücken-Pfeiler $\alpha = 6{,}76$;

e) für breite Gerinne, Frei-Schleusen mit Flügelwänden, schräge Einbaue, spitze Brücken-Pfeiler $\alpha = 7{,}54$.

Dabei nennt man $c = 2\sqrt{gh} = 7{,}91 \times \sqrt{h}$ die hypothetische, und $c = \alpha \cdot \sqrt{h}$ die wirkliche Geschwindigkeit.

Diese Verminderung der Geschwindigkeit beim Ausfließen des Wassers aus Oeffnungen schreibt man dem im Moment des Ausfließens statt findenden Seiten-Druck des Wassers zu, wodurch die Bewegung gehemmt oder der Querschnitt des ausfließenden Strahles vermindert wird.

4) Dividirt man die aus einer beliebig großen Seiten-Oeffnung eines Gefäßes, in welchem das Wasser durch Zufluß immer in gleicher Höhe erhalten wird, in einer Sekunde ausgelaufene Wasser-Menge M durch den Inhalt E dieser Oeffnung, so erhält man „die diesem Wasserstande zukommende mittlere Geschwindigkeit" des ausfließenden Wassers; in so fern man unter letzterer die konstante Geschwindigkeit versteht, mit welcher das Wasser an jeder Stelle der Oeffnung, sie mag höher oder tiefer liegen, ausfließen müßte, damit in der Sekunde dieselbe Wasser-Menge M ausliefe.

Diese letztere läßt sich auch berechnen, ohne daß die ausgeflossene Wasser-Menge M bekannt ist. Man verfährt dabei genau wie im §. 83. — Haben A_1, A_2, A_3, 2c., a_1, a_2, a_3, 2c., und E die dortige Bedeutung, so sind $\alpha \cdot \sqrt{a_1}$, $\alpha \cdot \sqrt{a_2}$, $\alpha \cdot \sqrt{a_3}$, 2c.

die Geschwindigkeiten, mit welchen das Wasser aus den einzelnen Streifen A_1, A_2, A_3, 2c., ausfließt; also sind $\alpha A_1 \sqrt{a_1}$, $\alpha A_2 \sqrt{a_2}$, $\alpha A_3 \sqrt{a_3}$, 2c., die aus diesen einzelnen Streifen in der Sekunde geflossenen Wasser-Mengen; folglich wird die mittlere Geschwindigkeit c gefunden aus der Gleichung

$$c = \alpha \frac{A_1 \sqrt{a_1} + A_2 \sqrt{a_2} + A_3 \sqrt{a_3} + \cdots}{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots},$$

in so fern $E = A_1 + A_2 + A_3 +$ 2c. ist.

Ist die Oeffnung E das im §. 84. angenommene Rechteck, so findet sich nach dem dortigen Verfahren die mittlere Geschwindigkeit $c = \frac{2}{3}\alpha \cdot \frac{(h + a \cdot sin\,\psi)^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}}{a \cdot sin\,\psi}$; wo α der Kontraktions-Koefficient, h der Abstand des Wasserspiegels über der höchsten Seite b der Oeffnung, a die Länge der Oeffnung (von unten nach oben) und wo endlich ψ der Winkel ist, um welchen das Rechteck oder auch die Seite a desselben gegen den Horizont geneigt ist (der im §. 84. durch α ausgedrückt worden ist).

Man findet nämlich die Wasser-Menge

$$M = \int_{a \div 0} \alpha b \cdot dx \cdot \sqrt{h + x \cdot sin\,\psi}$$

und daher die mittlere Geschwindigkeit

$$c = \frac{\alpha}{a} \int_{a \div 0} \sqrt{h + x \cdot sin\,\psi} \cdot dx.$$

5) Führt man die in Nr. 4. angedeutete Rechnung für jede beliebig geformte (ebene) Seiten-Oeffnung aus, so findet man, daß die mittlere Geschwindigkeit etwas, aber in den gewöhnlichen Fällen und wenn die Ausfluß-Oeffnung nicht allzu groß ist, nur wenig kleiner ist, als sie dem Abstand H des Wasserspiegels vom Schwer-Punkt der Ausfluß-Oeffnung zukommt, also nur wenig kleiner als $\alpha \sqrt{H}$.

6) Für eine Ausfluß-Oeffnung, welche ein vertikales Rechteck bildet, dessen Breite $= b$ und Höhe $= a$ ist, und dessen oberster Rand bis zum Wasserspiegel reicht (der durch Zufluß immer in derselben Höhe erhalten wird) findet sich die mittlere Geschwindigkeit c (nach Nr. 4.)

I. $c = \frac{2}{3}\alpha \cdot \sqrt{a} = \alpha\sqrt{\frac{4}{9}a}$;

während die Nr. 5. näherungsweise geben würde

I. 1. $c = \alpha\sqrt{\frac{1}{2}a}$.

Die in einer Sekunde ausgeflossene Wasser-Menge M ist daher, wenn man die Geschwindigkeit c aus I. nimmt, ausgedrückt in

II. $M = \frac{2}{3}\alpha b a\sqrt{a} = \frac{2}{3}\alpha b a^{\frac{3}{2}}$;

dagegen ist nach der anderen Berechnung von c aus I. 1.

II. 1. $M = \alpha b a\sqrt{\frac{1}{2}a}$.

7) Geht unter denselben Voraussetzungen, wie in Nr. 6., der Wasserspiegel noch um h — a Fuße über den obersten Rand b der Ausfluß-Oeffnung, also daß der Wasserstand über den untersten Rand = h ist, so findet sich nach der Rechnung der Nr. 4. (wenn h — a statt h geschrieben wird), in so fern hier $\psi = 90^0$ gedacht ist,

I. $$c = \frac{2}{3}\alpha \cdot \frac{h^{\frac{3}{2}} - (h-a)^{\frac{3}{2}}}{a}$$

und II. $$M = \frac{2}{3}\alpha b\left[h^{\frac{3}{2}} - (h-a)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$= \frac{2}{3}\alpha b\left[h\sqrt{h} - (h-a)\sqrt{h-a}\right].$$

Nimmt man aber die genäherte Rechnung der Nr. 5., so findet man in diesem Falle

I. 1. $c = \alpha\sqrt{h - \frac{1}{2}a}$

und II. 1. $M = \alpha b a\sqrt{h - \frac{1}{2}a}$.

Sucht man h, so gebraucht man die Formel II. 1.; wird aber a gesucht, so bedient man sich lieber der genaueren Formel II., weil aus solcher a sich leichter noch findet, als aus der anderen II. 1.

§. 89.

Wenn durch ein Gerinne, einen Kanal, Graben oder Fluß das Wasser bei unverändertem Querschnitt a auf die Länge l, zu welcher das Gefälle e gehört, in einerlei Richtung gleichförmig abfließt, so daß der Wasserspiegel mit dem Grundbett als parallel anzusehen ist, und wenn unter p der auf diese Länge l ebenfalls konstante benetzte Umfang verstanden wird, so wird die

mittlere Geschwindigkeit c dieses Abfließens gefunden aus der Gleichung

I. $$c = 90{,}9 \times \sqrt{\left(\frac{e}{l} \cdot \frac{a}{p}\right)};$$

daher ist die in der Sekunde abfließende Wasser-Menge

II. $$M = 90{,}9 \times a \cdot \sqrt{\left(\frac{e}{l} \cdot \frac{a}{p}\right)};\ ^{*})$$

immer unter der Voraussetzung, daß e, l, p in rheinischen Fußen, a in solchen Quadratfußen, und M in solchen Kubikfußen ausgedrückt ist.

Dieser Ausdruck für c ist auf dem Wege der versuchsweisen Construktion von Formeln gefunden worden, indem man den Widerstand w, welcher aus der Adhäsion und Cohäsion des Wassers sich herschreibt, mit dem benetzten Umfange p, so wie mit dem Quadrat c^2 der Geschwindigkeit direkt, mit dem Querschnitt a dagegen umgekehrt proportional annahm, also $w = k \cdot \frac{pc^2}{a}$ setzte; gleichzeitig aber auch denselben Widerstand w, da er die Beschleunigung $g \cdot \frac{e}{l}$ vernichtet (weil das Abfließen gleichförmig statt finden soll), mit $\frac{e}{l}$ proportional sich dachte, also $w = k' \cdot \frac{e}{l}$ nahm. Aus $k \cdot p \frac{c^2}{a} = k' \cdot \frac{e}{l}$ findet sich dann $c = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \sqrt{\left(\frac{e}{l} \cdot \frac{a}{p}\right)}$, während du Buat aus Versuchen den Mittel-Werth des Koefficienten $\sqrt{\frac{k'}{k}}, = 90{,}9$ gefunden hat.

So wie ein Fluß anschwillt, so daß Querschnitt a und Profil p andere Werthe A und P annehmen, so nimmt auch die mittlere Geschwindigkeit c einen anderen Werth C an, und zwar ist

$$C : c = \sqrt{\frac{A}{P}} : \sqrt{\frac{a}{p}}.$$

§. 90.

Je größer bei einerlei Querschnitt a der benetzte Umfang p wird, desto geringer ist die mittlere Geschwindigkeit c; und in al-

---

*) Diese Formel wird auch dazu gebraucht, aus der abgeflossenen Wasser-Menge das Gefälle $\frac{e}{l}$ zu bestimmen.

allen den Fällen, wo p bei einerlei a ein Minimum ist, da ist c ein Maximum. Man findet daher leicht:

1) Bei rechtwinkligen Profilen CABD (Fig. 61.) ist c ein Maximum, so oft die Breite $x = AB$ doppelt so groß wie die Tiefe $h = AC$ ist, also wenn

$$x = 2h = \sqrt{2a} \quad \text{und} \quad h = \sqrt{\tfrac{1}{2}a}$$

genommen wird.

2) Ein symmetrisch dossirtes Profil CABD (Fig. 62.), welches bei der Tiefe $AG = h = \frac{1}{2}\sqrt{2a}$ und bei demselben Querschnitt a denselben kleinsten Umfang p hat, wie das beste rechtwinklige von derselben Tiefe h (und Breite 2h nach Nr. 1.), hat eine Grundbreite $AB = u$ und eine Ausladung $CG = DH = z$, welche beide durch die Gleichungen

$$hu + hz = 2h^2 (= a) \quad \text{und} \quad u + 2\sqrt{h^2 + z^2} = 4h (= p)$$

gegeben sind, woraus

$$u = \tfrac{2}{3}h = \tfrac{1}{3}\sqrt{2a} \quad \text{und} \quad z = \tfrac{4}{3}h = \tfrac{2}{3}\sqrt{2a}$$

hervorgeht.

3) Für jedes dieser beiden Profile ist dann (nach §. 89.)

$$c = 90{,}9 \times \sqrt{\left(\frac{e}{l} \cdot \tfrac{1}{2}h\right)} \quad \text{und} \quad M = 90{,}9 \times 2h^2 \sqrt{\left(\frac{e}{l} \cdot \tfrac{1}{2}h\right)},$$

während $h = \frac{1}{2}\sqrt{2a}$ und M die größte Wasser-Menge ist, welche bei demselben Gefälle $\frac{e}{l}$ und bei demselben Querschnitt a, aber bei verschiedenen rechtwinkligen oder dossirten Profilen, durch einen dieser Querschnitte in der Sekunde abfließen kann.

Anmerkung. Kann man die Menge des durch einen bestimmten Querschnitt in der Sekunde abfließenden Wassers nicht nach §. 89. bestimmen, weil man die dortigen Voraussetzungen oder doch nicht die dazu nöthigen Stücke hat, so verfährt man praktisch auf folgende Weise:

1) Man mißt an dieser Stelle die Geschwindigkeit v des Wassers an der Oberfläche.

2) Erfahrungen lehren, daß die Geschwindigkeit nach der Tiefe zu für jeden Fuß Tiefe um $0{,}008 \times v$ abnimmt.

3) Man mißt daher die Tiefe h an derselben Stelle, hat dann in dieser Tiefe, also ganz unten die Geschwindigkeit

$$v - 0{,}008 \times v \cdot h,$$

und nimmt dann das arithmetische Mittel zwischen der größten und kleinsten Geschwindigkeit, als die mittlere c, so daß

$$c = (1 - 0{,}004 \cdot h) \cdot v$$

wird, während v die Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Wassers vorstellt.

Der Definition der mittleren Geschwindigkeit (im §. 88. Nr. 4.) zufolge wird dieses Verfahren nach §. 88. Nr. 5. bei rechtwinkligen Profilen der Wahrheit ziemlich nahe kommen.

§. 91.

Ist bei einer Röhrenleitung von L Fuß Länge der Durchmesser der Röhren im Lichten $= d$, und die gesammte Druckhöhe $= h$, so ist, wenn c die mittlere Geschwindigkeit des abfließenden Wassers und M die in der Sekunde abfließende Wasser-Menge bedeutet,

$$\text{I.} \qquad c = 6{,}42 \times \sqrt{\left(\frac{50\,dh}{L + 50\,d}\right)};$$

$$\text{II.} \qquad M = 5\,d^2 \sqrt{\left(\frac{50\,dh}{L + 50\,d}\right)};$$

während man ohne zu großen Fehler auch

$$\text{III.} \qquad M = 35\,d^2 \sqrt{\frac{dh}{L}}$$

setzen kann, in so fern L gegen d sehr groß ist.

Man hat diese Formel ungefähr auf folgendem Wege construirt. — Wären keine Röhren, sondern wäre die Ausflußöffnung unmittelbar am Gefäß, so würde nach §. 88. Nr. 3. $c = \alpha\sqrt{h}$ seyn. Wegen des Hindernisses, welches die Röhren bilden, wird aber ein Theil h' der Höhe h verbraucht, so daß nun $c = \alpha\sqrt{h - h'}$ wird. Weil aber das Hinderniß, also h' wächst mit der Länge L, mit dem Umfange $d\pi$, mit der Geschwindigkeit c, dagegen abnimmt, wenn der Querschnitt $\frac{1}{4}d^2\pi$ größer wird, so versucht man und nimmt $h' = \beta \cdot \frac{L \cdot d\pi \cdot c^2}{\frac{1}{4}d^2\pi}$, oder $h' = k \cdot \frac{Lc^2}{d}$, wo k eine konstante Versuchszahl und von du Buat $= \frac{1}{2000}$ gefunden worden ist. Aus $c = \alpha\sqrt{h - h'}$, $h' = k \cdot \frac{Lc^2}{d}$ erhält man aber, wenn h' eliminirt wird, die obige Formel

für c. — Aber c mit dem Querschnitt der Röhre $\frac{1}{4}d^2\pi$ d. h. mit dem Inhalt der Ausfluß-Oeffnung multiplicirt giebt dann auch M.

§. 92.

Ist am Ende der Röhrenleitung eine horizontale Oeffnung zu einem Wasserstrahl angebracht, so müßte die Strahlhöhe z nach dem Gesetze der in die Höhe geworfenen Körper (§. 59.) berechnet werden können aus der Gleichung $c^2 = 4gz$. — Nach Mariotte's Versuchen berechnet sich aber diese Höhe z sicherer aus der Druckhöhe h mittelst der Gleichung

$$h = z + \frac{z^2}{300},$$

so daß $z < h$ wird.

Beispiele zu dieser Abtheilung.

1) An einem See befindet sich ein Ueberfall von 40′ Breite, über welchen das Wasser 4′ hoch abfließt; wie viele Kubikfuße Wasser fließen in jeder Sekunde ab, und um wieviel (x) müßte der Fachbaum niedriger gelegt werden, damit dieselbe Menge Wassers in der Sekunde noch abflösse, wenn der Ueberfall nur 30′ breit gemacht würde? — Man findet für $\alpha = 5$, $M = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 40 \cdot 4\sqrt{4} = 1066\frac{2}{3}$; und $\frac{2}{3}\alpha \cdot 30 \cdot (4+x)\sqrt{4+x} = \frac{2}{3}\alpha \cdot 40 \cdot 4\sqrt{4}$, woraus $x = \frac{5}{6}$ hervorgeht, so daß also der Fachbaum um 10 Zoll tiefer gelegt werden müßte.

2) Welche Wasser-Menge fließt in jeder Sekunde aus einer Schutz-Oeffnung von 4 Fuß Breite und 1 Fuß Höhe, bei 5 Fuß Wasserstand? — Für $\alpha = 5$ folgt (§. 88. Nr. 7.) $M = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = 42{,}42$; oder $M = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot [5\sqrt{5} - 4\sqrt{4}] = 42{,}40$.

3) Bei einem Wasserstand von 4 Fuß sollen durch eine Schutz-Oeffnung von 3 Fuß Breite in jeder Sekunde 30 Kubikfuß Wasser abgeführt werden, wie hoch (e) muß die Schutz-Oeffnung seyn? — Für $\alpha = 5$ hat man $30 = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 3 \cdot [4\sqrt{4} - (4-e)\sqrt{4-e}]$ und hieraus $e = 4 - \sqrt[3]{25} = 1{,}08$.

4) Es soll ein Fluß, welcher bei der höchsten Anschwellung

20000 Qadratfuß Querschnitt und 4000 Fuß bewegten Umfang hat, eingedeicht werden. Wenn nun die Höhe der Deiche zu 30 Fuß bestimmt ist, wie weit müssen dieselben im Mittel aus einander stehen, damit diese höchste Wasser-Menge abgeführt werden wird? — Ist c die mittlere Geschwindigkeit in dem Querschnitt von 20000 Quadratfußen, und v die, welche sich zwischen den Deichen erzeugen wird, so wie x die gesuchte Breite, so hat man

$$1)\ 20000 \cdot c = 30 \cdot x \cdot v \quad \text{und} \quad 2)\ c : v = \sqrt{\frac{20000}{4000}} : \sqrt{\frac{30x}{x + 2 \cdot 30}},$$

woraus $x = 300$ hervorgeht.

5) Die vortheilhaftesten Abmessungen eines dossirten Grabens zu finden, der bei 4 Zoll Gefälle auf 100 Ruthen, in jeder Sekunde 200 Kubikfuß Wasser abführt. — Bezeichnet h die Tiefe in Fußen, so hat man (nach §. 90. Nr. 3.)

$$200 = 90{,}9 \times 2h^2 \sqrt{\left(\frac{4}{14400} \cdot \frac{h}{2}\right)}, \quad \text{also} \quad h = 6{,}14,$$

also die Grundbreite $\frac{2}{3}h = 4{,}1$ und die Auslabung $\frac{4}{3}h = 8{,}2$ Fuß.

6) Welchen Durchmesser (d) muß eine Röhrenleitung von 1000 Fuß Länge erhalten, um bei einer Druckhöhe von 10 Fuß in jeder Sekunde 2 Kubikfuß Wasser zuzuführen? — Nach §. 91. ist hier $2 = 5\,d^2 \sqrt{\left(\frac{50 \cdot 10 \cdot d}{1000 + 50 \cdot d}\right)}$, woraus für die Weite d $9\frac{1}{2}$ Zoll hervorgeht.

Zweite Abtheilung.

Von der Verengung des Quer-Profils eines Flusses; und von dem Rückstau.

§. 93.

Wird in einem Flusse, dessen mittlere Breite $= B$, mittlere Tiefe $= H$ und mittlere Geschwindigkeit $= c$ ist, durch einen Einbau die Breite auf b Fuß reducirt, so findet sich die Erhöhung x seines Wasserspiegels, so wie die neue mittlere Geschwindigkeit v aus folgenden zwei Gleichungen:

$$1)\ x = \frac{v^2}{\alpha^2} - \frac{c^2}{4g} \quad \text{und} \quad 2)\ b(H+x)v = BHc,$$

wovon die zweite ausdrückt, daß gleiche Wasser-Mengen (jetzt wie vorher) abfließen, während $\frac{v^2}{\alpha^2}$ die neue Druckhöhe, $\frac{c^2}{4g}$ die alte Druckhöhe ausdrückt (nach §. 88. Nr. 3. und Nr. 1.), und wobei α den Kontraktions-Koefficienten vorstellt; so daß daraus die Gleichung 1. sich erklärt. — Eliminirt man v, so erhält man für x eine kubische Gleichung, oder wenn $H+x=z$ gesetzt wird, die Gleichung

$$z^3 - \left(H - \frac{c^2}{4g}\right)z^2 - \frac{B^2H^2c^2}{\alpha^2 b^2} = 0.$$

§. 94.

Wird in einem Fluß durch einen Einbau der Wasserspiegel um h Fuße erhöht, so wird die Größe des Rückstaues, d. h. die Anzahl A der Fuße, bis auf welche man eine Erhöhung des Wasserspiegels rückwärts bemerkt, nach du Buat's Versuchen aus der Gleichung

$$A = \frac{1{,}9 \times h}{\frac{e}{l} - \frac{e'}{l'}}$$

gefunden, wenn e das Gefälle auf die Länge l des alten Wasserspiegels bedeutet, und wenn e' und l' dieselbe Bedeutung für den neuen Wasserspiegel haben. Dieses letztere Gefälle $\frac{e'}{l'}$ muß aber in der Anwendung dieser Formel erst aus der (mittelst des Gefälles $\frac{e}{l}$, d. h.) bei dem alten Wasserspiegel in der Sekunde abgeflossenen Wasser-Menge M, welche auch bei dem neuen Wasserspiegel dieselbe bleibt, berechnet werden, und zwar nach §. 89.

Dritte Abtheilung.

Von der Zeitbestimmung bei Ausleerung und Füllung prismatischer Gefäße.

§. 95.

1) Aus einem prismatischen Gefäß vom Querschnitt A, in welchem das Wasser Anfangs bis zur Tiefe h steht, fließt das Wasser aus einer Oeffnung im Boden vom Querschnitt a, in einer Zeit t′ gänzlich ab, welche aus der Gleichung

$$t' = \frac{2A}{\alpha a}\sqrt{h}$$

gefunden wird.

Ist s die in der unbestimmten Zeit t erfolgte Senkung des Wasserspiegels, so senkt sich derselbe in dem nächsten unendlich kleinen Zeit-Theilchen dt um $ds = \partial s_t \cdot dt$, so daſs in demselben Zeit-Theilchen $A \cdot ds$ oder $A \cdot \partial s_t \cdot dt$ Wasser abgeflossen ist. — Die Geschwindigkeit v zu Ende der Zeit t, ist aber $= \alpha\sqrt{h-s}$, und es flieſst daher in demselben Zeit-Theilchen dt durch die Oeffnung a die Menge $a\alpha\sqrt{h-s} \cdot dt$ ab; also hat man die Gleichung

$$A \cdot \partial s_t = \alpha a \cdot \sqrt{h-s} \quad \text{oder} \quad \partial t_s = \frac{A}{\alpha a} \cdot \frac{1}{\sqrt{h-s}},$$

woraus

$$t = \frac{A}{\alpha a}\int_{s \div 0} \frac{ds}{\sqrt{h-s}} = \frac{2A}{\alpha a}(\sqrt{h} - \sqrt{h-s}).$$

2) Soll aber der Wasserspiegel bloß um e Fuße tiefer gelegt werden, so wird die dazu nöthige Zeit t″ aus der Gleichung

$$t'' = \frac{2A}{\alpha a} \cdot [\mathrm{h} - \sqrt{\mathrm{h} - \mathrm{e}}]$$

gefunden.

3) Befindet sich die Oeffnung a in einer Seitenwand, so kann man dieselben Formeln näherungsweise beibehalten, wenn man unter h die Entfernung des Schwer-Punkts von a, vom anfänglichen Wasserspiegel versteht.

4) Genau dieselbe Zeit t′ (in Nr. 1.) oder t″ (in Nr. 2.)

wird aber auch verwandt, wenn dasselbe Gefäß durch dieselbe Oeffnung von a Quadratfußen bis zur Höhe h, oder bis zur Höhe h — e, gefüllt werden soll, aber dadurch, daß es mit einem zweiten Gefäße kommunicirt, in welchem das Wasser durch Zufluß immer auf derselben Höhe h erhalten wird; weil dann das Wasser, sobald es im ersteren Gefäß die Höhe s erreicht hat, mit der Geschwindigkeit $v = \alpha\sqrt{h - s}$ einströmt, welche der Differenz h — s der Wasserspiegel gleich ist; — und gerade so groß war in Nrr. 1 — 3. die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers, nachdem der Wasserspiegel um die Höhe s gesunken war. — Nur muß man im Falle der Nr. 3. die Höhe der Wasserspiegel vom Schwer-Punkt der Oeffnung an zählen.

Danach kann man z. B. die Zeit bestimmen, welche ein See von gegebenem mittleren Querschnitt gebraucht, um durch eine unten angebrachte Oeffnung um eine gegebene Anzahl von Fußen zu sinken. — Danach kann man die Zeit berechnen, welche zur Füllung und Leerung einer Schleusenkammer nöthig ist. U. d. gl.

Doch wird dabei vorausgesetzt, daß der Wasserspiegel immer wenigstens bis an den oberen Rand der Oeffnung reicht. Ist dies nicht der Fall, so wird, je mehr der Wasserspiegel sinkt, die Oeffnung selbst (bis zum Wasserspiegel gerechnet) immer kleiner, und dann muß eine andere Rechnung eintreten.

Vierte Abtheilung.

Von der Kraft des bewegten Wassers, dem Stromquadranten und den ober- und unterschlächtigen Wasserrädern.

§. 96.

1) Trifft ein mit der Geschwindigkeit c aus einer Oeffnung von a Quadratfußen stetig ausfließender Wasserstrahl in demselben Augenblick ein unbewegliches Brett normal, so erleidet solches einen stetigen Druck von P Pfunden, während P berechnet wird aus der Gleichung

$$P = \frac{c^2}{2g} a\gamma = \frac{Mc}{2g}\gamma = 2ah\gamma;$$

wo M(=ac) die in der Sekunde ausfließende Wasser-Menge,

$h\left(=\frac{c^2}{4g}\right)$ die zu der Geschwindigkeit c gehörige Fallhöhe, und γ das Gewicht eines Kubikfußes Wassers bedeutet.

Denn in der unendlich kleinen Zeit dt fließt aus der Oeffnung a eine Menge Wassers $= ac \cdot dt$, welche das Gewicht $ac\gamma \cdot dt$ und die Masse $\frac{ac\gamma}{2g}dt$ hat, welche also, da sie mit der Geschwindigkeit c gegen das Brett stößt, (nach §. 67. Nr. 4.) den Stoß $\frac{ac^2}{2g}\gamma \cdot dt$ gegen das Brett ausübt, folglich (nach §. 67. Nr. 5. und Nr. 6.), da dieser unendlich kleine Stoß stetig wirkt, den obigen Druck P.

2) Hat das Brett selbst schon die Geschwindigkeit v, so bestimmt sich der stetige Druck P′ des Strahles auf dasselbe aus der Gleichung $P' = \frac{c-v}{2g} \cdot M\gamma$. — Dabei heißt P die absolute, P′ die relative Einwirkung.

Anmerkung. Für Schiffmühlenräder ist nach Versuchen für P und P′ nur die Hälfte zu nehmen, wenn c die mittlere Geschwindigkeit des fließenden Wassers ist.

§. 97.

Um die Geschwindigkeit des fließenden Wassers nahe am Wasserspiegel zu messen, dazu gebraucht man den Stromquadranten, welcher aus einer Kugel an einem Faden besteht, die unter das Wasser gebracht und von dem Strome fortgestoßen wird, so daß der Faden mit der Vertikale einen Winkel α macht, der an einem angebrachten Quadranten abgelesen wird. Es zeigt sich nämlich der Theorie zu Folge für denselben Stromquadranten $\frac{c}{\sqrt{tg\,\alpha}}$ als ein konstanter Quotient, so daß, wenn man ein für allemal solchen (indem man c aus Versuchen mit schwimmenden Körpern bestimmt) aufgefunden und im Mittelwerth durch m bezeichnet hat, dann sogleich für jeden neuen Fall

$$c = m \cdot \sqrt{tg\,\alpha}$$

sich ergiebt.

Sind nämlich Q und Q′ die Drucke, welche zwei Strömungen mit den Geschwindigkeiten c und c′ auf eine und dieselbe Kugel ausüben, so hat man nach §. 96. $Q:Q' = c^2:c'^2$. — Ist aber p das Gewicht der Kugel unter Wasser, so ist nach dem Parallelogram der Kräfte $p \cdot tg\alpha = Q$ (weil, wenn Fig. 63. den Stromquadranten vorstellt, und $AB = p$, $AD = Q$ ist, im Gleichgewicht $p \cdot sin\alpha = Q \cdot cos\alpha$ seyn muß); also ist auch $p \cdot tg\alpha' = Q'$; demnach $Q:Q' = tg\alpha : tg\alpha'$, woraus $\frac{c^2}{tg\alpha} = \frac{c'^2}{tg\alpha'^2}$ hervorgeht.

§. 98.

Ein unterschlächtiges Wasser-Rad wird in Bewegung gesetzt durch das Gewicht des Wassers, welches in den Zellen sich befindet, und dann noch durch den Druck des zuströmenden Wassers. Ist nun v die Geschwindigkeit der Schaufeln, c die Geschwindigkeit des zuströmenden Wassers, welches in der Sekunde die Wasser-Menge M liefert, so ist der letztere Druck (nach §. 96.) $= \frac{c-v}{2g} M\gamma$; und dieser Druck wirkt auf den Theilriß des Rades, welcher den Halbmesser r haben mag. — Das Gewicht des in den Zellen enthaltenen Wassers (welches den wasserhaltenden Bogen, von der Länge b und Höhe h bildet, wenn solcher bis zu der Zelle, deren unterste Schaufel eben horizontal liegt, und in der Central-Linie des Wasser-Körpers gedacht wird) ist $= b \cdot \frac{M}{v} \cdot \gamma$, und der Schwer-Punkt, auf welchen dieses Gewicht wirkt, ist vom Mittelpunkt des Theilrisses des Rades um $e = \frac{hr}{b}$ entfernt (nach §. 14. Nr. 7.); also ist das statische Moment dieses Gewichtes in Bezug auf den Mittelpunkt des Rades, $= hr\frac{M}{v}\gamma$; daher diese Kraft auf den Theilriß reducirt $= h\frac{M}{v}\gamma$ *). — Der Gesammtdruck auf den Theilriß des Rades ist daher

$$= h\frac{M}{v}\gamma + \frac{c-v}{2g} M\gamma = \left(\frac{h}{v} + \frac{c-v}{2g}\right) M\gamma.$$

*) Dies letztere gilt nur, wenn keine Reibung berücksichtigt werden soll.

Multiplicirt man diese Kraft mit r, so hat man das statische Moment dieses Druckes in Bezug auf den Mittelpunkt des Rades als Centrum; dividirt man aber dieselbe Kraft, die in Pfunden ausgedrückt ist, durch die Schwere 2g, so hat man eine Masse, welche Gewicht hat; und diese mit der Geschwindigkeit v multiplicirt giebt dann (nach §. 67. Nr. 4.) die „Größe der Bewegung" (oder das „mechanische Moment") dieser Kraft. — Vergleicht man endlich dieses mechanische Moment mit anderen, bei welchen statt der Massen die Gewichte gesetzt worden sind, so muß man natürlich hier auch die Division mit 2g weglassen, d. h. das Gewicht statt der Masse setzen.

Richtet man, was nach den Erfahrungen das beste seyn soll, die Last so ein, daß $v = c$ wird, so fällt die Wirkung des Druckes des zuströmenden Wassers ganz weg, und es ist dann bloß $h \cdot \frac{M}{v} \cdot \gamma$ die Kraft, die auf den Theilriß wirkt. Dann ist das „statische Moment" derselben $= hr \cdot \frac{M}{v} \cdot \gamma$; ihr „mechanisches Moment" aber (wenn man überall statt der Massen die Gewichte gesetzt hat), $= hM\gamma$, während im Mittel $h = \frac{5}{3}r$ genommen werden kann, so daß das „mechanische Moment" oder der „Effekt" $= \frac{5}{3}rM\gamma$ genommen werden kann.

Die „Effekte" zweier Wasser-Räder, wenn in beiden $v = c$ ist, verhalten sich daher, wie die Produkte der auf sie in der Sekunde stürzenden Wasser-Mengen mit den Halbmessern der Theilrisse der Räder multiplicirt; jedoch unter der Voraussetzung, daß die Reibung des Rades in den Zapfenlagern nicht berücksichtigt werden soll.

§. 99.

Bei'm unterschlächtigen Wasser-Rad im horizontalen Gerinne wirkt der Stoß des zuströmenden Wassers ganz allein. Ist daher c die Geschwindigkeit, womit das Wasser die Schaufeln normal trifft, v die Geschwindigkeit der Schaufeln, und M die in jeder Sekunde ankommende Wassermenge, so ist der stetige Druck P

gegen die Schaufel

$$=\frac{c-v}{2g}M\gamma,$$

woraus durch Multiplikation mit r, oder mit v, das „statische" oder das „mechanische" Moment dieser Kraft gefunden wird, während das letztere auch der „Effekt" des Rades genannt wird, wenn nur r den Halbmesser des (Theilrisses des) Rades vorstellt.

Für $v=\frac{1}{2}c$ wird der Effekt ein Maximum.

§. 100.

Bei einem unterschlächtigen Rad im Kropfgerinne ist dagegen der stetige normale Druck P gegen die Schaufeln aus der Gleichung

$$P=\left(\frac{c-v}{2g}+\frac{h}{v}\right)M\gamma$$

zu berechnen, wo c die Geschwindigkeit des normal auf die Schaufeln sich stürzenden Wassers, v die Geschwindigkeit der Schaufeln, M die in der Sekunde zuströmende Wasser-Menge, γ das Gewicht eines Kubikfußes Wasser, und h die Höhe des Kropfes bedeuten.

Denn der Druck P besteht dasmal aus dem Druck, der von dem zuströmenden Wasser herrührt, und noch von dem Gewichte des im Kropfe befindlichen Wassers. Dieser letztere Theil ist aber (nach §. 98.) $=h\cdot\frac{M}{v}\cdot\gamma$.

Fünfte Abtheilung.

Vom Heber und den Pumpen.

§. 101.

Bei dem Heber und bei den Pumpen wirkt der Luftdruck zugleich mit dem Wasser. — Für die Luft hat man folgende Erfahrungen:

1) Das specifische Gewicht der atmosphärischen Luft nahe an der Erd-Oberfläche ist $=\frac{1}{800}$; so daß 1 Kubikfuß solcher Luft etwa $\frac{1}{12}$ Pfund wiegt.

2) Der Druck der (durch ihre eigene Schwere zusammen-

gedrückten) Luft, den ihre Elasticität gegen jede gegebene Fläche a verursacht, ist, wenn man sich nicht zu hoch über dem Meere befindet, ungefähr dem Gewichte einer 32 Fuß hohen Wassersäule, oder dem Gewichte einer 28 Zoll hohen Quecksilbersäule gleich, welche diese Fläche a zur Grundfläche hat; d. h. dieser Druck ist also ungefähr $= 66 \cdot 32 \cdot a$ oder $= 2112 \cdot a$ Pfunden, wenn a in Quadratfußen ausgedrückt ist. — Je höher der Ort über der Meeresfläche liegt, desto kleiner ist dieser Luftdruck. Außerdem ist derselbe einer täglichen kleinen Veränderung unterworfen, die durch das Barometer gemessen wird.

§. 102.

In einem Gefäße ABCD (Fig. 64.), in welchem das Wasser immer auf derselben Höhe CD erhalten wird, hängt ein **Heber** EFG, dessen Querschnitt im Lichten gleich a ist, dessen untere Oeffnung G von der Ebene des Wasserspiegels CD um $HK = h$ absteht, und der mit Wasser ganz angefüllt ist. Ist nun FK kleiner als 32 Fuß, so wird die Wassersäule IF von dem Druck der Luft auf dem Wasserspiegel CD erhalten, so daß der Querschnitt bei F des Schenkels FG von dem Gewicht einer Wassersäule gedrückt wird, welche die Höhe $32 - FK$ Fuße hat. Die Oeffnung bei G wird also nach unten gedrückt durch diesen Druck und noch durch das Gewicht einer Wassersäule von der Höhe FH, also im Ganzen von dem Gewicht einer Wassersäule von der Höhe $32 - FK + FH$ d. h. von der Höhe $32 + HK$ oder $32 + h$ Fußen. Dagegen drückt die Luft dieselbe Oeffnung in entgegengesetzter Richtung mit dem Gewicht einer Wassersäule von 32 Fuß Höhe; also bleibt ein Ueberschuß an Druck bei G nach unten, welcher dem Gewichte einer Wassersäule von h Fußen Höhe gleich kommt. — Deshalb ist die Geschwindigkeit c des bei G ausströmenden Wassers $= \alpha \sqrt{h}$ und die in der Sekunde ausströmende Wasser-Menge $M = a \cdot c = \alpha a \sqrt{h}$, wo α den Kontraktions-Koefficienten vorstellt.

§. 103.

Es sey A der Querschnitt des Stiefels einer Saugpumpe,

D der Durchmesser desselben, und H die Förderungs-Höhe, d. h. die Höhe des in der Pumpe vom Wasserspiegel des Kessels bis zur Ausflußröhre stehenden Wassers, während die Pumpe im Beharrungsstand gedacht wird. Dann ist die Druckhöhe auf den Kolben, der sich in der Entfernung e vom Wasserspiegel im Kessel befinden mag, $=32+H-e$; und die Höhe des Gegen-Drucks $=32-e$; also der Ueberschuß der ersteren über die andere $=H$. Eine Wassersäule von dieser Höhe wiegt $AH\gamma$ Pfunde, und dies ist also die Kraft, welche zur senkrechten Erhebung des Kolbens nöthig seyn würde, wenn keine weiteren Hindernisse vorhanden wären. Ein Haupthinderniß ist aber die Reibung, welche nach den Erfahrungen einer Druckhöhe von $\frac{1}{10}\frac{H}{D}$ Fußen gleich kommt.

1) Also ist die Kraft P′, mit welcher der Kolben senkrecht in die Höhe zu heben ist, zu bestimmen aus der Gleichung

$$P' = \left(1+\frac{1}{10D}\right)AH\gamma.$$

2) Bei dem Niederdrücken ist die Reibung das Haupthinderniß, daher die dazu nöthige Kraft

$$P'' = \frac{1}{10D}\cdot AH\gamma,$$

wo γ immer das Gewicht eines Kubikfußes Wasser bedeutet, also $\gamma = 66$ ist.

3) Sind die Pumpen paarweise geordnet, so daß wenn in der einen der Kolben in die Höhe geht, derselbe in der anderen gleichzeitig niedergedrückt wird (wodurch ein gleichförmigerer Gang entsteht), so ist für n Paare Pumpen die erforderliche Kraft

$$P = n(P'+P'') = n\left(1+\frac{1}{5D}\right)AH\gamma.$$

§. 104.

Ist M die Wasser-Menge, welche durch n Paare Saug-Pumpen in jeder Sekunde gehoben wird, w die Geschwindigkeit der Kolben, A der Querschnitt derselben, so ist

$$M = nAw.$$

Man setzt aber, wegen des Hub-Verlustes

$$M = \tfrac{9}{10} nAw.$$

In der Minute werden also 54nAw Kubikfuße Wasser gefördert durch n Paare Pumpen.

Nach Eytelwein sind $\frac{1}{3}$ und $\frac{5}{2}$ die Grenzen des Werthes für w.

§. 105.

1) Bei einer Druck-Pumpe ist die zum Niederdrücken des Kolbens nöthige Kraft P′ wie im §. 103. Nr. 1., nämlich

$$P' = \left(1 + \frac{1}{10D}\right) AH\gamma,$$

wenn A den Querschnitt des Stiefels, D seinen Durchmesser und H die Höhe der Wassersäule vom tiefsten Stand des Kolbens bis zum Ausguß vorstellt.

2) Zum Erheben des Kolbens im schlimmsten Falle braucht man die Kraft

$$P'' = \left(1 + \frac{1}{10D}\right) Ab\gamma,$$

wo b den Kolbenhub bezeichnet; weil die Druckhöhe auf ihn $= 32$, die entgegengesetzte aber $32 - b$ ist.

3) Für n Paare Druck-Pumpen ist die gesammte erforderliche Kraft

$$P = n\left(1 + \frac{1}{10D}\right) A(H + b)\gamma,$$

wo immer γ das Gewicht eines Kubikfußes Wasser bedeutet, wo also $\gamma = 66$ ist.

§. 106.

Die in der Sekunde oder Minute durch n Paare Druck-Pumpen geförderte Wasser-Menge ist genau dieselbe, wie sie im §. 104. für n Paare Sauge-Pumpen bereits gefunden worden ist.

Erster Anhang.

Von der Festigkeit der Materialien.

§. 107.

Die Kraft, welche ausreicht einen Körper zu zerreißen, heißt die absolute Festigkeit des Körpers (in der Richtung dieser Kraft).

Die Kraft, welche gerade ausreicht einen Körper (mittelst einer Hebel-Unterlage) zu zerbrechen, heißt seine relative Festigkeit.

Die Kraft endlich, welche gerade ausreicht einen Körper zu zerdrücken oder zu zerquetschen, wird seine rückwirkende Festigkeit genannt.

Wir setzen hier immer homogene Körper voraus, und in der Regel von prismatischer oder cylindrischer Form. Hat ein Körper eine andere Form, so zerreißt er immer da, wo er am dünnsten ist; folglich gerade so, wie wenn er von prismatischer oder cylindrischer Form wäre, die durchaus diesen (dünnsten) Querschnitt hat. — Auch mag man dabei immer an Balken, Metallstangen, Seile und dgl. denken.

I. Absolute Festigkeit.

§. 108.

Die zum Zerreißen eines Balkens, Drathes, Seils, ꝛc. in seiner Längen-Richtung nöthige und gerade ausreichende Kraft Q (während das andere Ende an einem unbeweglichen Körper befestigt ist, oder am anderen Ende eine gleiche Kraft Q in entge-

gengesetzter Richtung wirkt) ist allemal mit dem Querschnitt a des Körpers proportional. — Es ist also die **absolute Festigkeit** Q dieses Körpers aus der Gleichung

$$Q = k \cdot a$$

zu finden, wo k die durch Versuche ausgemittelte absolute Festigkeit eines Körpers derselben Art von 1 Quadratzoll Querschnitt vorstellt, und a den Querschnitt des gegebenen Körpers in Quadratzollen ausdrückt.

Eytelwein giebt diese Versuchszahl k auf folgende Weise an, wobei jedoch vorausgesetzt ist, daß bei den Holz-Arten die Kraft jedesmal längs der Holzfasern wirkt.

Materie.	k in Pfunden.	Materie.	k in Pfunden.
Apfelbaumholz	10000	Blei, engl. gegoss.	900
Birnbaumholz	11000	Bleidrath	3900
Buchenholz	22000	Eisen	70000
Eichen, Erlen, Eschen	22000	Eisendrath	60000
Fichten	10000	Kupfer	30000
Kiefern	16000	Kupferdrath	40000
Ulmen	14000	Stahl	120000
Weiden	15000	Hanfene Seile.	10000

Bei den Anwendungen dieser Tafel muß man übrigens noch bedenken, daß die Körper (namentlich Metalle), ehe sie zerreißen, sich strecken, also dadurch dünner werden, so daß der Querschnitt a viel geringer genommen werden muß, als er wirklich ist. — So rechtfertigt sich einigermaßen die Regel, daß man bei Abschätzung der Haltbarkeit einer Vorrichtung (Bau-Anlage, 2c.) statt k nur den dritten Theil der in der Tabelle stehenden Zahlen nehmen soll.

1) Die absolute Festigkeit eines eisernen Bolzens von $\frac{1}{2}$ Zoll Dicke, also von $\frac{1}{16}\pi$ oder 0,2 Quadratzoll Querschnitt, findet sich $= 70000 \times 0{,}2 = 14000$ Pfund. — Man giebt also diesem Bolzen etwa 5000 Pfund zu tragen.

2) Will man berechnen wie dick man ein hanfenes Seil nehmen müsse, damit es **mit Sicherheit** ein Gewicht von 16000 Pfund trage, so muß

$$\tfrac{1}{3} \cdot 10000 \times \tfrac{1}{4}\pi x^2 = 16000$$

wer-

werden, wenn x die Dicke des Seils in Zollen vorstellt, und wo statt k nur $\frac{1}{3}\cdot 10000$ gesetzt worden ist. — Diese Gleichung giebt aber

$$x = \sqrt{\frac{4\cdot 48}{10\cdot\pi}} = \sqrt{\left(19{,}2\times\frac{1}{\pi}\right)} = 2\tfrac{1}{2} \text{ (Zolle).}$$

II. Relative Festigkeit.

§. 109.

Ein horizontal eingemauerter Balken von der Breite b und Dicke h ragt um die Länge a aus der Mauer hervor. An seinem Ende wirkt die relative Festigkeit P (d. h. die Kraft, die gerade ausreicht ihn zu zerbrechen); wie groß ist solche?

Da die Kraft P am meisten wirkt, je länger ihr Hebel-Arm ist, so wird der Balken nur dicht an der Mauer zerbrechen. Das Gewicht W des hervorragenden Theils des Balkens wirkt in der Entfernung $\frac{1}{2}a$ von der Mauer, hat also das statische Moment $= \frac{1}{2}W\cdot a$, d. h. dasselbe, wie wenn das halbe Gewicht des hervorragenden Theils des Balkens am Ende des Balkens wirkte. Denkt man sich daher in P bereits dieses halbe Gewicht $\frac{1}{2}W$ mit einbegriffen, so ist das statische Moment der Gesammt-Kraft P, die das Zerbrechen bewirkt, $= a\cdot P$. Die absolute Festigkeit $Q = kbh$ kann man sich in der Mitte des Querschnitts bh concentrirt denken, sie hat also in Bezug auf die Mauer als Hebel-Unterlage den Hebel-Arm $\frac{1}{2}h$, demnach das statische Moment $kbh\times\frac{1}{2}h$. — Folglich hat man die Gleichung

$$a\cdot P = \tfrac{1}{2}kbh^2$$

woraus $P = \frac{1}{2}k\cdot\frac{bh^2}{a}$ hervorgeht.

Weil dies Resultat aber mit den Erfahrungen nicht stimmt, so nimmt man (mit Einschluß des halben Gewichts des hervorragenden Theils des Balkens)

$$\text{I.} \qquad P = N\cdot\frac{bh^2}{a},$$

so daß das statische Moment dieser relativen Festigkeit in Bezug auf die Zerbrechungsstelle

$$\text{II.} \qquad a\cdot P = N\cdot bh^2$$

ist, wo a, b, h in Zollen, P in Pfunden ausgedrückt, N dagegen (nach Eytelwein) aus folgender Tabelle zu entnehmen ist, der jedoch solche Versuche zu Grunde liegen, in denen nach geringer Vermehrung von P ein augenblickliches Zerbrechen erfolgte.

Materie.	N	Materie.	N
Kiefernholz	2878	Rothbüchen	4700
Eichen	4000	Weißbüchen	3000
Rothtannen	2050	Erlen	3450
Weißtannen	2740		

Dabei glaubt Eytelwein, daß man, wenn man Sicherung auf die Dauer beabsichtigt, etwa nur den 32sten Theil des berechneten P als Belastung nehmen dürfe.

Danach müßte man also für die Sicherung auf die Dauer

$$\text{III.}\quad P = n \cdot \frac{bh^2}{a} \quad \text{und} \quad \text{IV.}\quad aP = n \cdot bh^2$$

nehmen (a, b, h in Zollen, P in Pfunden ausgedrückt) und n aus folgender Tafel:

Materie.	n	Materie.	n
Kiefernholz	90	Rothbüchen	147
Eichen	125	Weißbüchen	94
Rothtannen	64	Erlen	108
Weißtannen.	85		

Von diesem Gewicht P, wie es aus III. gefunden wird, zieht man dann noch das halbe Gewicht des hervorragenden Theils des Balkens ab, um dasjenige Gewicht zu haben, welches der Balken an seinem Ende auf die Dauer mit Sicherheit tragen kann.

Ragt also ein Balken 10 Fuß oder 120 Zoll horizontal heraus, hat er die Breite von 8 Zoll und soll er (mit Einschluß des halben Gewichtes seines hervorragenden Theils) 800 Pfund am anderen Ende tragen, so findet man seine Höhe h aus der Gleichung

$$800 = n \cdot \frac{8 \cdot h^2}{120} = 90 \cdot \frac{8 \cdot h^2}{120};$$

so daß $h = \frac{20}{3}\sqrt{3} = 11{,}55$ (Zoll) gefunden wird.

§. 110.

Da die relative Festigkeit $= n\frac{bh^2}{a}$, bei einerlei Materie und einerlei hervorragender Länge a, mit bh^2 proportional ist, so kann man einen Stamm, dessen Durchmesser d ist, da man $d^2 = b^2 + h^2$ hat, allemal so behauen, daß bh^2 ein Maximum wird, daß er also die größte Tragfähigkeit erhält. — Die Lehre vom Größten und Kleinsten giebt

$$b:h = 1:\sqrt{2}.$$

Welchen Durchmesser d muß ein eichener Stamm haben, damit der tragfähigste aus ihm zu beschlagende Balken, wenn die hervorragende Länge = 10 Fuß = 120 Zoll ist, eine für die Ausdauer bestimmte relative Festigkeit von 2000 Pfund (mit Einschluß des halben Gewichts des hervorragenden Theils des Balkens) habe?

Man hat

$$1)\ 2000 = 125 \cdot \frac{bh^2}{120}; \qquad 2)\ b:h = 1:\sqrt{2}; \qquad 3)\ d^2 = b^2 + h^2.$$

Dies giebt

$$d = \sqrt[3]{2880 \cdot \sqrt{3}} = 17{,}1,$$

also $b = d \cdot \sqrt{\tfrac{1}{3}} = 9{,}8$ und $h = d \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}} = 13{,}9$;

alles in Zollen.

§. 111.

Ein Balken AC von der Länge AC = a, Breite b, Höhe h, liegt mit beiden Enden A und C auf Mauern horizontal auf (Fig. 23.). In D, während AD = c, also CD = a — c seyn soll, wirkt eine Kraft L; wie groß muß L seyn, wenn solche Kraft gerade ausreicht den Balken zu zerbrechen?

Die Mauern bei A und C erleiden einen Druck, welcher bezüglich $N = \frac{(a-c)L}{a}$ und $R = \frac{c \cdot L}{a}$ ist. Bei C wirkt also ein Druck R der Mauer gegen den Balken, in der vertikalen Richtung nach oben, während die Kraft L in D die Stelle der Unterlage im vorigen Problem (des §. 109.) vertritt. Diese Kraft R oder $\frac{cL}{a}$, welche den Balken bei D zerbricht, ist daher

nach (§. 109.) so bestimmt

$$\frac{cL}{a} = N \cdot \frac{bh^2}{a-c} \quad \text{oder} \quad \frac{cL}{a} = n \cdot \frac{bh^2}{a-c},$$

je nachdem sie für augenblickliches Zerbrechen oder für die Dauer bestimmt ist. Daraus findet sich

$$1) \quad L = N \cdot \frac{abh^2}{c(a-c)} \quad \text{oder} \quad L = n \cdot \frac{abh^2}{c(a-c)},$$

wo N oder n aus den Tabellen des §. 109. zu entnehmen ist.

Liegt der Punkt D in der Mitte E des Balkens, so ist $c = a - c = \frac{1}{2}a$ und man hat dann

$$2) \quad L = 4N \cdot \frac{bh^2}{a} \quad \text{oder} \quad L = 4n \cdot \frac{bh^2}{a};$$

also ist die relative Festigkeit hier gerade 4 mal so groß, als wenn der Balken im §. 109. um die Länge a hervorragt und die Kraft L am Ende desselben wirkte.

Anmerkung. Man nimmt häufig an, daß, wenn ein Balken in seiner Mitte und zugleich an seinen Enden unterstützt, und eine Last auf dem Balken gleichmäßig vertheilt ist, so daß P seine Gesammt-Belastung vorstellen mag, — dann die mittlere Unterlage die Last $\frac{1}{2}$P, die äußersten Unterlagen aber jede $\frac{1}{4}$P tragen *). Man setzt dann in den Gleichungen 2.) $\frac{1}{2}$P statt L, und findet

$$3) \quad P = 8N \cdot \frac{bh^2}{a} \quad \text{oder} \quad P = 8n \cdot \frac{bh^2}{a}$$

als die gleichmäßige Belastung (inklusive des Gewichtes des Balkens selbst), welche derselbe gerade noch verträgt ohne zu zerbrechen.

Wie gewagt aber diese Annahmen sind, brauchen wir nicht zu wiederholen.

Beispiele. Man findet durch diese Rechnungen, daß ein eichener Bal-

*) Diese Annahme ist durch nichts gerechtfertigt. Ist a die Länge des Balkens, sind x und z die Drucke an den Enden und y der in der Mitte, so hat man zur Bestimmung dieser Drucke die 2 Gleichungen $x+z+y = P$ und $P \times \frac{1}{2}a = y \times \frac{1}{2}a + z \cdot a$ oder $P - y = 2z$; woraus zwar $x = z$, aber durchaus nicht hervorgeht, wie groß y ist.

ken von 15 Fuß Länge, 8 Zoll Breite und 10 Zoll Höhe, der horizontal an seinen beiden Enden auf Unterlagen aufliegt, in seiner Mitte auf die Dauer 2222 Pfund, dagegen 4000 Pfund in einer Entfernung von $12\frac{1}{2}$ oder $2\frac{1}{2}$ (welche Entfernung gesucht seyn kann) gerade noch trägt, während aus der (etwas stark gewagten) Rechnung der Anmerkung hervorgeht, daß derselbe Balken eine auf ihn gleichmäßig vertheilte Last von 4444 Pfund gerade noch tragen wird (für die Dauer).

§. 112.

Ein unter dem Winkel $BAE = \alpha$ (Fig. 25.) gegen den Horizont geneigter Balken AB trägt an jeder seiner Stellen C gerade so viel, als ein horizontal liegender Balken von denselben Dimensionen und von derselben Materie, aber von der Länge $AE = AB \cdot \cos\alpha$, welche die horizontale Projektion der Länge AB des ersteren Balkens ist, an der Stelle C′ trägt, welche die horizontale Projektion jener Stelle C ist, so daß man $AC' = AC \cdot \cos\alpha$ hat.

Man erhält dies Resultat, wenn man das vertikale Gewicht senkrecht auf den Balken zerlegt, wo dann die letztere Kraft für den schief liegenden Balken dasselbe ist, wie ein vertikaler Druck auf den horizontal liegenden Balken.

III. Rückwirkende Festigkeit.

§. 113.

Ein Balken steht mit seiner Grundfläche, welche die Kanten b und h hat, wobei $h < b$ gedacht ist, auf einer festen horizontalen Ebene. Die Höhe (Länge des Balken) sey $= a$. Auf die obere Grundfläche wird ein Gewicht R gelegt, welches der rückwirkenden Festigkeit gleich ist, d. h. welches gerade ausreicht den Balken in der Mitte zu biegen und zu zerbrechen. Wie groß ist R? —

Man findet

1) $$R = m \cdot \frac{bh^3}{a^2};$$

wo m eine Versuchszahl ist, die nach Eytelwein's Angabe, für lange Dauer, während b, h, a in Zollen, R dagegen in Pfun-

den ausgedrückt seyn soll, so gefunden wird, nämlich:

bei Kiefernholz $m = 48520$,

bei Eichenholz $m = 61408$.

Man denkt sich den Balken in der Mitte bereits gebogen und eben im Begriff zu zerbrechen, und stellt sich vor, daß seine beiden Theile unmittelbar vor dem Zerbrechen einen Winkel 2α mit einander machen. Die beiden Kräfte R, die auf die obere und untere Grundfläche senkrecht und einander entgegen wirken, nach der Richtung der Balken-Theile zerlegt, so daß sie beide in $R \cdot \sin\alpha$ übergehen, halten nun mit der nach §. 111. Nr. 2. gefundenen Kraft $4n\frac{bh^2}{a}$, welche senkrecht auf die Länge des Balkens steht, und das Zerbrechen gerade bewirkt, also, wenn sie in entgegengesetzter Richtung gedacht wird, das Zerbrechen gerade auch hindert, das Gleichgewicht. Daher ist (nach §. 6. Nr. 3.)

$$R \cdot \sin\alpha : \sin\alpha = 4n\frac{bh^2}{a} : \sin 2\alpha,$$

d. h.

$$R = 4n\frac{bh^2}{a \cdot \sin 2\alpha}.$$

Weil aber $\sin 2\alpha$ desto größer wird, je kleiner 2α, d. h. je größer der Nebenwinkel von 2α, dieser aber offenbar mit a zugleich wächst, dagegen abnimmt wenn h größer wird, so nimmt man $\sin 2\alpha$ mit $\frac{a}{h}$ proportional, und dann folgt augenblicklich $R = m\frac{bh^3}{a^2}$.

§. 114.

Ist $a < h < b$ und der Körper kein Balken der sich biegen kann und dann brechen, sondern etwa ein Sandstein oder ein Ziegelstein, welcher zerdrückt oder zerquetscht werden kann, so nimmt man R mit dem Querschnitt bh proportional, d. h.

$$R = k \cdot bh;$$

und nach Eytelwein's Angaben ist

für Sandstein $k = 2631$,

für Ziegelstein $k = 1124$;

wenn nur b und h in Zollen, R dagegen in Pfunden ausgedrückt gedacht werden.

Wir können diese Betrachtungen über die Festigkeit der Materialien nicht schließen, ohne den Anfänger noch ausdrücklich bemerken zu lassen, daß in den theoretischen Betrachtungen viele Willkühr ist, und daß selbst die faktischen Angaben nur mit großer Vorsicht benutzt werden können.

Zweiter Anhang.

Vermischte Uebungs-Beispiele.

---

§. 115.

1) Von einer abgekürzten Pyramide ist A der Inhalt der unteren, B der Inhalt der oberen Grundfläche. Der Abstand dieser parallelen Grundflächen ist $= h$. Man soll den Schwer-Punkt dieser abgekürzten Pyramide finden.

Der Schwer-Punkt liegt in der Geraden, welche die Schwer-Punkte der beiden parallelen Grundflächen mit einander verbindet; und ist x die senkrechte Entfernung desselben von der unteren, so wie x′ die senkrechte Entfernung desselben von der oberen Grundfläche, so findet sich

$$x = \tfrac{1}{4}h \cdot \frac{A + 2\sqrt{AB} + 3B}{A + \sqrt{AB} + B};$$

$$x' = \tfrac{1}{4}h \cdot \frac{B + 2\sqrt{AB} + 3A}{B + \sqrt{AB} + A}.$$

2) Geht die vorgedachte Pyramide in einen Kegel über, dessen Grundflächen die Radien R und r haben, so findet sich

$$x = \tfrac{1}{4}h \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2};$$

$$x' = \tfrac{1}{4}h \cdot \frac{r^2 + 2Rr + 3R^2}{r^2 + Rr + R^2}.$$

3) Ist der abgekürzte Kegel noch durch einen Cylinder ausgehöhlt (wie bei einer Kanone), dessen Halbmesser $= a$ ist, und

der von einer der Grundflächen bis zur anderen reicht, so findet sich

$$x = \frac{1}{4}h \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2 - 6a^2}{R^2 + Rr + r^2 - 3a^2}; \quad x' = \frac{1}{4}h \cdot \frac{r^2 + 2rR + 3R^2 - 6a^2}{r^2 + rR + R^2 - 3a^2}.$$

§. 116.

1) Ein Balken AC (Fig. 23.) soll in B und D mit den Gewichten Q und L belastet werden; in seiner Mitte E wirkt sein eigenes Gewicht P. Wo liegt der Punkt H, wo derselbe unterstützt werden muß, um in horizontaler Lage im Gleichgewicht zu seyn?

Man hat, wenn der Gegendruck in h durch y bezeichnet wird, die beiden Gleichungen

$$Q + P + L - y = 0;$$

$$Q \times AB + P \times AE + L \times AD - y \cdot AH = 0;$$

woraus

$$AH = \frac{Q \times AB + P \times AE + L \times AD}{Q + P + L}$$

hervorgeht.

2) Wie lang muß ein Balken AB = x seyn (Fig. 22.), damit, wenn jeder laufende Fuß p Pfunde wiegt, in C noch ein Gewicht von L Pfunden wirkt, und wenn er in A unterstützt ist, in B eine gegebene Kraft von R Pfunden, die aber vertikal in die Höhe wirkt, denselben im Gleichgewicht hält?

Ist N der Gegendruck in A, so hat man die beiden Gleichungen (wenn AC = a gesetzt wird)

$$-N + px + L - R = 0,$$

$$px \times \tfrac{1}{2}x + L \times a - R \cdot x = 0,$$

woraus

$$x = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 2apL}}{p}$$

hervorgeht. Sind beide Werthe reell, so sind auch beide positiv, und ist dann noch jeder größer als a, so genügt jeder der Aufgabe; außerdem aber nur derjenige welcher größer als a ist.

3) Zwei Bretter die sich in einer horizontalen Geraden schnei-

den, sind an einander befestigt, und so gestellt, daß sie mit der durch ihre Durchschnitts-Linie gehenden vertikalen Ebene bezüglich die Winkel α und β machen (Fig. 65.). Zwischen ihnen liegt eine homogene Kugel vom Halbmesser r und vom Gewichte P. Wie stark drückt diese Kugel die beiden Bretter?

Ist (Fig. 65.) ECF ein Querschnitt, der durch den Mittelpunkt D der Kugel geht, und CG die Vertikale, also ECG $= \alpha$ und FCG $= \beta$, so finden die Drucke N und R in A und B statt, wo die Kugel die Bretter berührt, und senkrecht auf die Bretter. Die Gegendrucke N und R der Bretter gegen die Kugel wirken daher in der Richtung der Radien AD und BD, so daß der Punkt D als von den 3 Kräften P, N und R angegriffen angesehen werden kann, die sich im Gleichgewicht halten. Es verhält sich daher nach §. 6. Nr. 3.

$$P : \sin(\alpha + \beta) = N : \sin(90 + \beta) = R : \sin(90 + \alpha),$$

woraus

$$N = \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot P \quad \text{und} \quad R = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot P$$

hervorgeht.

§. 117.

1) Es sey C (Fig. 66.) der Schwer-Punkt eines horizontalen Wagebalkens, welcher die Länge AB $= 2$AD $= 2$a hat, während CD $=$ e senkrecht auf AB stehen und D der Dreh-Punkt des Balkens seyn soll. In F und G, welche vertikal unter A und B und so liegen sollen, daß AF $=$ BG $=$ b ist, seyen gleiche Gewichte R, R angehängt, und der Wagebalken ist in horizontaler Lage im Gleichgewicht. Wenn nun an das Gewicht R bei G noch ein Gewicht Q zugelegt wird; in welcher Lage wird der Balken wiederum im Gleichgewicht seyn?

Es sey A′B′ die neue Lage des Balkens im Gleichgewicht, C′ die neue Lage des Schwer-Punkts und W das Gewicht des Balkens; ferner sey W·C′DC $= \psi$, so sind in Bezug auf das Centrum D die Momenten-Arme von R, R$+$Q und W jetzt bezüglich

$a \cdot cos\,\psi + b \cdot sin\,\psi$, $a \cdot cos\,\psi - b \cdot sin\,\psi$ und $e \cdot sin\,\psi$; also hat man die Gleichung (weil keine Reibung beachtet wird)

$$R(a \cdot cos\,\psi + b \cdot sin\,\psi) + W \cdot e \cdot sin\,\psi - (R+Q)(a \cdot cos\,\psi - b \cdot sin\,\psi) = 0,$$

woraus

$$tg\,\psi = \frac{a \cdot Q}{(2R+Q) \cdot b + W \cdot e}$$

hervorgeht.

In dieser Aufgabe liegt die Theorie der Krämerwage. Sie ist am empfindlichsten, d. h. der Ausschlag ψ wird für ein gewisses Uebergewicht Q am größesten, je größer a und je kleiner R, b, W und e sind. Wären b und e beide der Null gleich, so würde das geringste Uebergewicht Q ein gänzliches Umschlagen zur Folge haben, so wie dann, wenn auch $Q = 0$ seyn sollte, der Balken in jeder Lage im Gleichgewicht seyn würde. Ist $b = 0$ allein, so wird

$$tg\,\psi = \frac{a \cdot Q}{W \cdot e};$$

und dann ist der Ausschlag von den Gewichten R ganz unabhängig, also bei größerer oder kleinerer Belastung der Wage immer gleich groß.

2) Eine Krämerwage spielt ohne Belastung richtig ein, hat aber ungleiche Arme, so daß sie mit gleicher Belastung nicht richtig einspielt. Man soll durch sie das richtige Gewicht eines Körpers bestimmen.

Sind a und b die ungleichen Arme der Wage, und ist x in der einen Schale gewogen $= Q$, in der anderen gewogen $= P$, so hat man

$$x \cdot a = b \cdot Q \quad \text{und} \quad x \cdot b = a \cdot P, \quad \text{also} \quad x = \sqrt{PQ}.$$

§. 118.

Es sey (Fig. 67.) AB der Balken einer Schnellwage, die ihren Dreh-Punkt in D hat, und dessen Schwer-Punkt C von der durch A gehenden Vertikale um die Länge b abliegen mag, während $AD = c$ ist, und W das Gewicht des Balkens seyn

soll. In A hänge ein Gewicht Q. In welcher Entfernung DE = x muß ein bestimmtes Gewicht P angehängt werden, um den Wagebalken horizontal im Gleichgewicht zu erhalten?

Man hat die Gleichung

$$c \cdot Q - (b - c) \cdot W - P \cdot x = 0,$$

woraus

$$x = DE = \frac{c-b}{P} \cdot W + \frac{c}{P} \cdot Q$$

hervorgeht.

Sind E′, E″, E‴, ꝛc. die Aufhänge-Punkte desselben Gewichtes P, wenn es mit den Gewichten Q+R, Q+2R, Q+3R, ꝛc. an A, den Balken in horizontaler Lage im Gleichgewicht halten soll, und bezeichnet man die Entfernungen DE′, DE″, DE‴, ꝛc. dieser Aufhänge-Punkte durch x′, x″, x‴, ꝛc., so findet sich

$$x' = DE' = \frac{c-b}{P} \cdot W + \frac{c}{P} \cdot (Q+R),$$

$$x'' = DE'' = \frac{c-b}{P} \cdot W + \frac{c}{P} \cdot (Q+2R),$$

$$x''' = DE''' = \frac{c-b}{P} \cdot W + \frac{c}{P} \cdot (Q+3R)$$

u. s. w. f.;

daher ist auch

$$x'-x = EE' = x''-x' = E'E'' = x'''-x'' = E''E''' = \frac{c}{P} \cdot R.$$

Hierin liegt die Theorie der Schnellwage. Das sich immer gleich bleibende Gewicht P rückt um gleich viel hinaus, wenn die Last um gleich viel vermehrt wird. Ist M die Stelle, wo P hängen muß, um 10 Pfund Last, N dagegen die Stelle, wo P hängen muß, um 110 Pfund Last das Gleichgewicht zu halten, so darf man nur MN in 100 gleiche Theile theilen, und man wird die Stellen haben, wo P nach und nach hängen muß, um mit den Lasten von 11, 12, 13, 14, 15, ⋯ 109 Pfunden das Gleichgewicht zu halten.

§. 118. b.

Ein statisches Problem im Raume.

In einem rechtwinklig parallelepipedalischen Gefäß, dessen drei Dimensionen a, b, c sind, liegt eine schwere Linie (ein Stab), der von einer der unteren Ecken bis zur, am weitesten davon entfernten oberen Ecke reicht. In der Mitte wirke das Gewicht P. Wie groß sind die Drucke, welche die Wände dieses Gefäßes erleiden? —

Nennt man x, y, z die Drucke in der unteren Ecke und zwar bezüglich in den Richtungen der Kanten a, b, c, wo a und b den Boden bilden, und c die Höhe des Gefäßes ist; und sind x', y', z' die drei entsprechenden oberen Drucke (also auch die Größe der Gegendrucke, welche die Wände des Gefäßes auf den Stab ausüben), so hat man nach §. 48. sechs Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich erstlich die drei Gleichungen

$$1)\ x - x' = 0; \quad 2)\ y - y' = 0; \quad 3)\ z - z' = P,$$

welche man erhält, wenn man die Summe der Kräfte, die parallel mit jeder der drei Koordinaten-Axen (welche letzteren mit den Kanten a, b, c zusammenfallen können) laufen, der Null gleich setzt; — und dann noch die drei Gleichungen, welche man erhält, wenn man die Kräfte auf den Boden und die zwei Seitenwände (als Koordinaten-Ebenen) projicirt, von den Projektions-Kräften die statischen Momente aus der gedrückten untersten Ecke (als Anfangs-Punkt der Axen) nimmt, und deren Summe einzeln der Null gleich setzt. Diese letzteren Gleichungen sind aber

$$4)\ bx' - ay' = 0; \quad 5)\ cx' - \tfrac{1}{2}aP = 0; \quad 6)\ cy' - \tfrac{1}{2}bP = 0.$$

Aus diesen Gleichungen findet man nun zunächst

$$x' = x = \frac{a}{2c}P; \qquad y' = y = \frac{b}{2c}P.$$

Und da in die Augen fällt, daß der Druck z' gegen die Decke des Gefäßes, der Null gleich seyn muß, so folgt noch

$$z = P;$$

d. h. der Boden hat in dieser Ecke das ganze Gewicht des Stabes zu tragen, während die Drucke auf die Wände desto größer sind, je weiter sie aus einander liegen.

Beispiele zur Berechnung der Stabilität.

§. 119.

Versteht man (nach §. 53.) unter Stabilität eines, auf einer Horizontal-Ebene stehenden Körpers in Bezug auf irgend eine Kante seiner Grundfläche, das statische Moment des Gewichts dieses Körpers (in dessen Schwer-Punkt angebracht) in Bezug auf diese Kante als Momenten-Axe (§. 48.), und ist ein für allemal p das Gewicht eines Kubikfußes der Materie dieses Körpers (Mauer, rc.), so kann man leicht folgende Aufgaben lösen. Alle Abmessungen sind dabei in Fußen ausgedrückt verstanden.

1) Die Stabilität eines rechtwinkligen Parallelepipedums, welches die beiden Grundkanten a und b und die Höhe c hat, ist in Bezug auf die Grundkante a, $= abcp \times \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} ab^2cp$; in Bezug auf die Grundkante b dagegen $= \frac{1}{2} a^2bcp$.

2) Die Stabilität eines senkrechten dreiseitigen Prisma, dessen Höhe b ist und dessen Grundflächen rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und h sind, und welches mit dem Rechteck a·b auf der Horizontal-Ebene aufliegen soll, ist in Bezug auf diejenige der Kanten b, welche der schiefen Wand gegenüber liegt, — $= \frac{1}{2} abhp \times \frac{1}{3} a = \frac{1}{6} a^2bhp$; in Bezug auf die andere mit ihr parallele Kante b aber, welche der vertikalen Wand gegenüber liegt, — $= \frac{1}{2} abhp \times \frac{2}{3} a = \frac{1}{3} a^2bhp$. In Bezug auf jede der beiden Kanten a dagegen ist die Stabilität allemal $= \frac{1}{2} abhp \times \frac{1}{2} b = \frac{1}{4} ab^2hp$.

3) Die Stabilität einer dossirten Mauer *), welche die Höhe h,

*) In allen bis zum §. 126. hin folgenden Aufgaben denken wir uns die Mauern allemal als feste Körper, welche auf dem Horizonte lose aufsitzen, und durch Seiten-Drucke umgekantet werden wollen, welchem Umkanten das bloße Gewicht der Mauer entgegen wirkt.

die Stärke b, die Auslage a und die Länge c hat, ist in Bezug auf die scharfe Längen-Kante $=\frac{1}{2}achp\times\frac{2}{3}a+bchp\times(a+\frac{1}{2}b)$ $=\frac{1}{6}hcp(2a^2+6ab+3b^2)$; in Bezug auf die andere Längen-Kante c dagegen,

$$=\frac{1}{2}achp\times(\frac{1}{3}a+b)+bchp\times\frac{1}{2}b=\frac{1}{6}hcp(a^2+3ab+3b^2).$$

Die Stabilität in Bezug auf letztere Kante ist also viel geringer als dieselbe in Bezug auf die erstere Kante.

Man hat hier den ganzen Körper in zwei Theile, nämlich in ein rechtwinkliges Parallelepipedum und in ein (in der Nr. 2. bereits betrachtetes) Prisma zerlegt gedacht, und den Satz angewandt, daß das statische Moment des Gewichts des Ganzen gleich ist der Summe der statischen Momente der Gewichte der Theile.

4) Ist dieselbe Mauer auf beiden Seiten dossirt, auf der anderen Seite aber mit der Auslage a′, so ist ihre Stabilität in Bezug auf die Grund-Längen-Kante, bei welcher die Auslage a endigt

$$=\frac{1}{2}ahc\times\frac{2}{3}a+bhc\times(a+\frac{1}{2}b)+\frac{1}{2}a'hc(a+b+\frac{1}{3}a').$$

5) Die Stabilität eines (senkrecht prismatischen) Pfeilers von der Höhe h, dessen Grundfläche aber ein Trapez ist, welches die beiden parallelen und ungleichen Seiten a und b hat, die um c von einander (senkrecht) abstehen, — ist in Bezug auf die Kante a, $=\frac{1}{2}(a+b)chp\times\frac{1}{3}c\frac{a+2b}{a+b}=\frac{1}{6}c^2hp(a+2b)$; in Bezug auf die mit ihr parallele Kante b ist die Stabilität desselben Pfeilers $=\frac{1}{6}c^2hp(2a+b)$.

§. 120.

Soll eine Mauer aufgeführt werden von der Länge l und Höhe h, welche auf dem Horizont lose aufsitzend gedacht wird, und welche von der einen Seite, die hier der größeren Bequemlichkeit wegen die *innere* heißen mag, einen bestimmten Druck auszuhalten hat, so kann die Frage entstehen: Welche Form muß man der Mauer geben, damit sie gleiche Stabilität mit jeder anderen hat, aber doch den geringsten körperlichen Inhalt habe, also das wenigste Material koste? —

Es ist klar, daß man sie nach der Seite zu, welche dem Druck entgegenliegt, und welche wir die äußere Seite nennen wollen, durch Dossirung, durch Bankete (niedrigere Mauern), durch Pfeiler, 2c. verstärken müsse, wenn bei derselben Menge von Material die Stabilität der Mauer gewinnen soll.

1) Ist z. B. b die Stärke einer parallelepipedalisch geformten Mauer, welche den gegebenen Druck verträgt, so ist

ihr Inhalt $= bhl$;

ihre Stabilität $= bhlp \times \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b^2hlp$.

2) Wird die Mauer dossirt, so sey b' ihre Stärke, a die Auslage der Dossirung, und es ist dann

ihr Inhalt $= b'hl + \frac{1}{2}ahl$;

ihre Stabilität $= b'hlp \times (a + \frac{1}{2}b') + \frac{1}{2}ahlp \times \frac{2}{3}a$.

Soll nun die Stabilität dieselbe seyn, so giebt dies die Gleichung

$$\frac{1}{2}b^2 = b'(a + \frac{1}{2}b') + \frac{1}{3}a^2.$$

Nimmt man nun die Auslage $a = \frac{1}{n}h$, wo n irgend eine gegebene Zahl ist, so daß a als bekannt (als gegeben) angesehen werden kann, so findet sich aus dieser Gleichung

$$b' = -a + \sqrt{\tfrac{1}{3}a^2 + b^2}.$$

Der Unterschied der Inhalte ist

$$= hl(b - b' - \tfrac{1}{2}a) = hl \cdot [b + \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{3}a^2 + b^2}];$$

und es wird also bei dieser zweiten Mauer an Material gespart, so lange $b + \frac{1}{2}a > \sqrt{\frac{1}{3}a^2 + b^2}$, d. h. $(b + \frac{1}{2}a)^2 > \frac{1}{3}a^2 + b^2$ d. h. $ab + \frac{1}{4}a^2 > \frac{1}{3}a^2$, d. h. $b > \frac{1}{12}a$, oder $a < 12b$ ist. — Damit aber b' nicht negativ werde, muß $a^2 < \frac{1}{3}a^2 + b^2$, d. h. $a < b\sqrt{\frac{3}{2}}$ seyn.

Man kann auch nach dem Werth der Auslage a fragen, für welche diese Ersparniß ein Größtes ist. Man würde aber dann $a = 3b$ finden, und dies würde b' negativ geben. Weil jedoch der Unterschied der Inhalte wächst von $a = 0$ an bis zu $a = 3b$ hin, so folgt, daß wenn b' so klein wie möglich, und a der Gleichheit der Stabilität gemäß genommen wird, dann diese Mauer unter den dossirten die vortheilhafteste ist.

3) Giebt man der Mauer die Stärke b'' und noch auf der äußeren Seite zwei Banquets, das eine von der Höhe $\frac{2}{3}h$, das andere von der Höhe $\frac{1}{3}h$, jedes von der Stärke a, so ist

ihr Inhalt $= (a+b'')hl$;

ihre Stabilität $= \frac{1}{3}ahlp \times \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}ahlp \times \frac{3}{2}a + b''hlp \times (2a+\frac{1}{2}b'')$.

Setzt man diese Stabilität der der ersteren Mauer gleich, so erhält man die Gleichung

$$\frac{7}{6}a^2 + b''(2a+\frac{1}{2}b'') = \frac{1}{2}b^2,$$

woraus, wenn man b'' als gegeben ansieht,

$$a = -\frac{6}{7}b'' + \frac{1}{7}\sqrt{15b''^2+21b^2}$$

hervorgeht. Sieht man a als gegeben an, so kann man auch b'' in b und a ausdrücken. Da a und b'' nicht negativ werden dürfen, so können a und b'' nicht gewisse positive Grenzwerthe überschreiten. Nimmt man $b'' = a$, so wird $a = b'' = b\sqrt{\frac{3}{22}}$.

Der Unterschied der Inhalte ist

$$= hl(b - a - b''),$$

also in diesem letzteren Falle $= hl(b-2a) = hlb(1-\frac{1}{11}\sqrt{66}) = 0{,}26 \times hlb$. Also ist bei dieser Mauer gegen die erstere ein Ersparniß an Material von 26 Procent, während beide dem Druck gleiche Stabilität entgegensetzen.

4) Noch bedeutender wird die Ersparniß an Material, wenn man auf die Länge l, eine Anzahl ν von Pfeilern auf der äußeren Seite mit der Mauer verbindet, welche die Stärke a, die Breite k und die Höhe h' (oder h) haben; — weil sich dann die Mauer bloß um die äußerste Kante der Pfeiler umkanten kann, daher auch das Rückkantungs-Moment (d. h. die Stabilität) der Mauer zwischen den Pfeilern viel größer wird.

Es ist nämlich dann, wenn b''' die jetzige Stärke der Mauer vorstellt, und wenn die Pfeiler rechtwinklig parallelepipedalisch gedacht werden,

der Inhalt der ganzen Mauer $= b'''hl + \nu ah'k$;

und ihre Stabilität $= b'''hlp \times (a+\frac{1}{2}b''') + \nu ah'kp \times \frac{1}{2}a$.

Der Unterschied des Inhalts gegen den der ersten Mauer ist

$$= hl(b-b''') - \nu ah'k;$$

und

und die Gleichheit der Stabilität giebt jetzt die Gleichung

$$(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b'''^2 - ab''')hl = \tfrac{1}{2}\nu a^2h'k,$$

woraus man einen der beiden Werthe a oder b''' finden kann, wenn die übrigen alle zweckgemäß angenommen werden.

Man versuche mehrere Rechnungen in Ziffern bei verschiedenen Annahmen der Werthe von k, h', ν rc. — Endlich kann man bei dieser vierten Mauer den Pfeilern auch noch statt der rechtwinklig parallelepipedalischen Form, die Form eines dreiseitigen Prisma geben, so daß der Theil der Mauer, wo sie stehen, den Pfeiler zur Dossirung hat.

§. 121.

Bei vielen Bauten, namentlich aber bei Festungs-Bauten, ist es in der Regel aus anderen Gründen vorgeschrieben, daß die äußeren Seiten der Mauern, worunter hier noch immer diejenigen Seiten verstanden seyn sollen, welche auf der entgegengesetzten Seite des Druckes liegen, eine völlig glatte senkrechte Wand bilden. Dann kann man natürlich die Verstärkungen nur nach innen zu anbringen, obgleich dies für die Stabilität nicht so vortheilhaft ist. — Auch hierüber wollen wir nachstehende Vergleichungen anstellen. — Nennen wir V den körperlichen Inhalt (das Volumen) der Mauer, W aber die Stabilität in Bezug auf die Kante, gegen welche der Druck wirkt, so erhalten wir

1) bei einer auf beiden Seiten lothrechten Mauer von der Stärke h,

$$V = bhl \quad \text{und} \quad W = \tfrac{1}{2}b^2hlp;$$

2) bei einer Mauer, welche von der Stärke a, aber auf der Seite des Druckes dossirt ist, und zwar mit einer Ausladung $= \frac{1}{n}h$, findet sich

$$V = ahl + \tfrac{1}{2}\frac{h^2l}{n} = \left(a + \tfrac{1}{2}\frac{h}{n}\right)hl,$$

$$W = ahlp \times \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\frac{h^2}{n}lp \cdot \left(a + \tfrac{1}{3}\frac{h}{n}\right);$$

3) für eine Mauer mit 2 Banquets auf der Seite des Drucks, das erste von der Höhe $\frac{2}{3}h$, das andere von der Höhe $\frac{1}{3}h$, jedes von der Stärke c, die Stärke der Mauer $= d$ gesetzt, ist

$$V = dhl + \tfrac{2}{3}hcl + \tfrac{1}{3}hcl = (d+c)hl,$$

$$W = dhlp \times \tfrac{1}{2}d + \tfrac{2}{3}hclp\left(d + \frac{c}{2}\right) + \tfrac{1}{3}hclp\cdot(d + \tfrac{3}{2}c);$$

4) für eine Mauer mit rechtwinklig parallelepipedalischen Pfeilern auf der Seite des Drucks die Pfeiler, von Mitte zu Mitte gerechnet, in der Entfernung $\frac{1}{\nu}$ von einander, so daß auf die Länge l, eine Anzahl ν solcher Pfeiler zu stehen kommen; wenn die Stärke der Pfeiler = k, ihre Breite gleich e gerechnet, und wenn die Stärke der Mauer = r gesetzt wird, — ist

$$V = rhl + \nu\cdot ehk;$$

$$W = rhlp \times \tfrac{1}{2}r + \nu\cdot ehkp\cdot(r + \tfrac{1}{2}k).$$

Soll nun eine Vergleichung angestellt werden, so kann man h, l, p als gegeben ansehen, desgleichen b in 1. als aus der Erfahrung entnommen; dann bleiben in 2. a und n, in 3. aber d und c, in 4. endlich r und k unbestimmt. Setzt man nun die Stabilitäten W einander, und namentlich die 3 letzteren der ersteren gleich, so hat man jedesmal über einen der beiden unbestimmten Werthe zu verfügen, um mit Berücksichtigung aller Umstände das Volumen V zu einem Kleinsten zu machen.

Wäre z. B. die Mauer 12′ hoch, 24′ lang; das Gewicht eines Kubikfußes des Materials 120 Pfunde; also h = 12, l = 24, p = 120; endlich aus Erfahrungen $b = \tfrac{1}{2}h = 6$, so würde für die Mauer 1. seyn

$$V = 1728 \text{ Kubikfuß}, \qquad W = 6\cdot 12\cdot 24\cdot 120\cdot 3.$$

Wird nun für die Mauer 2., n = 6 festgesetzt, so ist die Stabilität derselben

$$W = a\cdot 12\cdot 24\cdot 120 \times \frac{a}{2} + \frac{12^2}{2\cdot 6}\cdot 24\cdot 120\cdot\left(a + \frac{12}{3\cdot 6}\right).$$

Setzt man nun diesen Werth von W, dem für die Mauer 1. erhaltenen Werth von W gleich, so erhält man ungefähr a = 5, so daß der Kubik-Inhalt dieser Mauer 2. jetzt nahehin dem der Mauer 1. gleich wird.

Nimmt man für die Mauer 3. die Breite der Banquets 2′, also c = 2, so erhält man

$$W = d\cdot 12\cdot 24\cdot 120 \times \tfrac{1}{2}d + \tfrac{2}{3}12\cdot 2\cdot 24\cdot 120(d + \tfrac{2}{2}) + \tfrac{1}{3}12\cdot 2\cdot 24\cdot 120\cdot\left(d + \frac{3\cdot 2}{2}\right),$$

und setzt man diesen Werth von W dem ersteren gleich, so giebt dies nahehin d = 4. Der Kubik-Inhalt dieser Mauer ist aber ebenfalls ganz nahehin dem Kubik-Inhalt der ersteren gleich.

Wird endlich alle 12 Fuße ein Pfeiler gesetzt, also daß in Nr. 4. $\nu = 2$

ist; nimmt man dabei $k = 5$, $e = 4$, so ist aus 4.

$$W = r \cdot 12 \cdot 24 \cdot 120 \times \tfrac{1}{2} r + 2 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 120 (r + \tfrac{1}{2} 5);$$

und setzt man diesen Werth von W dem ersteren gleich, so giebt dies nahehin $r = 4$. — Der Kubik-Inhalt dieser Mauer mit ihren beiden Pfeilern beträgt dagegen $4 \cdot 12 \cdot 24 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 12$ d. h. 1632 Fuß; und so erscheint diese 4te Mauer unter den gemachten Voraussetzungen als die vortheilhafteste.

Anmerkung. Sollen diese Mauern Futter-Mauern seyn, d. h. bestimmt um Erdwälle vor dem Einsturz zu sichern, so würde unter den 4 Mauern des vorliegenden Beispiels offenbar die mit den beiden Banquets die vortheilhafteste werden, weil auf den Banquets bis zur Höhe der ganzen Mauer noch Erde zu liegen kommt, deren Druck ebenfalls zum Rückkanten wirkt. Um so viel dünner kann nämlich dann die Mauer selbst gemacht werden.

Nimmt man nämlich das Gewicht eines Kubikfußes Erde zu 80 Pfund an, so kommen bei der Mauer 3., weil jetzt die Banquets mit Erde bedeckt sind, zu der Stabilität W noch hinzu die Glieder $\tfrac{1}{3} \cdot 12 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 80 \cdot (d + \tfrac{2}{2})$ $+ \tfrac{2}{3} \cdot 12 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 80 \left(d + \frac{3 \cdot 2}{2}\right)$; und deshalb findet sich jetzt aus der Vergleichung dieser Stabilität mit der der Mauer 1., die Breite der Mauer 3. nämlich $d = 2{,}52$; so daß das Volumen dieser Mauer nebst den Banquets jetzt nur $1300\tfrac{3}{4}$ Kubikfuß beträgt.

Bei der dossirten Mauer in 2., wenn sie als Futter-Mauer benutzt wird, liegt auf der Dossirung ebenfalls Erde bis zur Höhe der ganzen Mauer, so daß noch der Erd-Druck dem Rückkantungs-Vermögen der Mauer günstig ist. Allein dieser Druck wirkt senkrecht gegen die schiefe Fläche der Dossirung, und daher kommt nur ein Theil davon auf den vertikalen Druck nach unten. Wenn man aber auch den ganzen Druck der, über der Dossirung liegenden Erde vertikal nach unten rechnet, so zeigt sich doch die Breite der Mauer $a = 4{,}3$, so daß der kubische Inhalt 1528 Kubikfuß wird, also zwar günstiger wie bei der Mauer 1. oder 4., dagegen nicht so günstig, wie bei der Mauer 3.

§. 122.

Wie stark muß eine Mauer von h Fuß Höhe und 1 Fuß Länge seyn, wenn sie parallelepipedalisch geformt ist und auf der

einen Seite ihrer ganzen Länge nach und in ihrer ganzen Höhe eine Wasser-Masse begrenzt?

Nach §. 84. ist die Größe des Wasser-Druckes gegen die Mauer $=\frac{1}{2}h^2l\gamma$, wenn γ das Gewicht eines Kubikfußes Wasser vorstellt, und der Mittelpunkt (d. h. der Angriffs-Punkt) dieses Druckes ist von der unteren Fläche der auf dem Horizont lose aufsitzenden Mauer um $\frac{1}{3}h$ entfernt. Also ist das statische Moment dieses Druckes in Bezug auf das Umkanten der Mauer $=\frac{1}{6}h^3l\gamma$. Ist nun die gesuchte Stärke der Mauer $=x$, so ist die Stabilität der Mauer $=xhlp\times\frac{1}{2}x$, wo p das Gewicht eines Kubikfußes der Mauer bedeutet. Setzt man daher beide statischen Momente einander gleich, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}hlpx^2=\tfrac{1}{6}h^3l\gamma \quad \text{oder} \quad x^2=\tfrac{1}{3}h^2\cdot\frac{\gamma}{p},$$

woraus

$$x=h\cdot\sqrt{\tfrac{1}{3}\frac{\gamma}{p}}$$

hervorgeht.

Ist, wie gewöhnlich $\frac{\gamma}{p}=\frac{1}{2}$, so wird

$$x=h\cdot\sqrt{\tfrac{1}{6}}=\tfrac{1}{6}h\sqrt{6}=0{,}41\times h.$$

d. h. die Stärke der Mauer muß ungefähr $\frac{2}{5}$ der Höhe betragen.

§. 123.

Wie stark muß dieselbe Mauer seyn, wenn sie nach der dem Druck entgegengesetzten Seite und mit einer Auslage, welche $\frac{1}{n}$ der Höhe beträgt, dossirt ist.

In diesem Falle ist die Stabilität der Mauer gegen den Wasser-Druck

$$=\frac{1}{2n}h^2lp\times\tfrac{2}{3}\frac{h}{n}+xhlp\times\left(\frac{1}{n}h+\tfrac{1}{2}x\right),$$

während das statische Moment des Wasser-Druckes genau dasselbe bleibt. Man erhält daher die Gleichung

$$\frac{1}{3n^2}h^2+\frac{1}{n}hx+\tfrac{1}{2}x^2=\tfrac{1}{6}h^2\cdot\frac{\gamma}{p},$$

oder
$$x^2+\frac{2}{n}hx=\tfrac{1}{3}h^2\left(\frac{\gamma}{p}-\frac{2}{n^2}\right),$$
woraus
$$x=h\left[-\frac{1}{n}+\sqrt{\left(\frac{1}{3n^2}+\tfrac{1}{3}\frac{\gamma}{p}\right)}\right]$$
hervorgeht.

Nimmt man wieder $\frac{\gamma}{p}=\frac{1}{2}$ und $n=3$, so wird
$$x=h(-\tfrac{1}{3}+\sqrt{\tfrac{11}{54}})=0{,}12\times h;$$
also ist die Stärke der Mauer dasmal nur ungefähr $\frac{1}{8}$ der Höhe.

Die Menge des Materials zweier Mauern von gleicher Höhe und Länge verhält sich wie der Querschnitt dieser Mauern, dessen Inhalt bei der ersteren Mauer $=0{,}41\times h^2$, bei der letzteren aber $=\frac{1}{6}h^2+0{,}12\times h^2=0{,}29\times h^2$ ist. Also werden bei der letzteren Mauer etwa 29 Procent an Material gespart.

Hätte man die Dossirung nach der Seite des Wassers zu gemacht, so wäre der Wasser-Druck, der Größe und Richtung nach, anders geworden. Da die Auslage $=\frac{1}{n}h$ ist, so macht die Dossirung mit dem Horizont einen Winkel α, welcher aus der Gleichung $tg\,\alpha=n$ berechnet werden kann, während der Flächenraum der Dossirung $=\frac{hl}{sin\,\alpha}$, also der Wasser-Druck dagegen $=\frac{h^2l\gamma}{2\,sin\,\alpha}$ wird. Der Mittelpunkt dieses Druckes, d. h. sein Angriffs-Punkt ist noch immer auf $\frac{1}{3}$ der Höhe, von unten an gerechnet; aber die Richtung des Druckes ist senkrecht auf die gedrückte Fläche, und er zerfällt daher in zwei Drucke, wovon der eine horizontal und $=\frac{1}{2}h^2l\gamma$, der andere aber vertikal und $=\frac{1}{2}h^2l\gamma\cdot cotg\,\alpha$ ist. Der erstere begünstigt das Umstürzen der Mauer, der letztere ist ihm entgegen. Das statische Moment des Umkantens ist daher
$$=\tfrac{1}{2}h^2l\gamma\times\tfrac{1}{3}h-\tfrac{1}{2}h^2l\gamma\cdot cotg\,\alpha\times\left(x+\tfrac{2}{3}\frac{h}{n}\right).$$
Das statische Moment des Rückkantens, welches dem Gewichte der Mauer zuzuschreiben ist, d. h. die Stabilität der Mauer ist

dagegen jetzt

$$= xhlp \times \tfrac{1}{2}x + \frac{h^2}{2n} lp \times \left(x + \tfrac{1}{3}\frac{h}{n}\right).$$

Die Gleichung zwischen beiden giebt nun, wenn man $\frac{\gamma}{p} = k$ setzt, und durch hlp dividirt,

$$\tfrac{1}{2}x^2 + \frac{h}{2n}x + \frac{h^2}{6n^2} = \tfrac{1}{6}h^2 \cdot k - \tfrac{1}{2}h \cdot cotg\,\alpha\left(x + \tfrac{2}{3}\frac{h}{n}\right),$$

oder

$$x^2 + h\left(\frac{1}{n} + k \cdot cotg\,\alpha\right) \cdot x = \tfrac{1}{3}h^2 \cdot \left(k - \frac{2k \cdot cotg\,\alpha}{n} - \frac{1}{n^2}\right),$$

woraus dann x sich ergiebt.

Für $n = 3$, $k = \frac{1}{2}$ wird $cotg\,\alpha = \frac{1}{3}$; also geht die Gleichung über in

$$x^2 + \tfrac{1}{2}hx = \tfrac{5}{54}h^2; \quad \text{also} \quad x = 0{,}14 \times h,$$

d. h. die Breite der Mauer muß jetzt ungefähr $\frac{1}{7}$ der Höhe betragen.

Anmerkung. Wenn Futter-Mauern so stark sind, daß sie den Wasser-Druck aushalten, so sind sie auch stark genug, um jedem Erd-Druck zu widerstehen. Umgekehrt kann die Erde so mit Wasser durchzogen seyn, daß der Erd-Druck dem Wasser-Druck ziemlich nahe kommt.

§. 124.

Die Stärke der Widerlager bei'm freistehenden scheidrechten Gewölbe zu bestimmen; immer unter der, in den letzteren Paragraphen stillschweigend gemachten Voraussetzung, daß die Mauern auf dem Horizonte lose aufsitzen.

Es sey Fig. 68. der Querschnitt durch die Mitte der Länge l, und zwar seyen ABCDE und LFGHK die Querschnitte der lothrechten Mauern, so wie CDGF der des scheidrechten Bogens, welchen letzteren wir uns als einen festen Körper denken, der auf den beiden Mauern in CD und FG (also wie der Keil im §. 35.) lose aufsitzt. Ferner sey $DG = a$, $CF = b$, und der Abstand dieser beiden parallelen $= h$; so wie die Höhe CB

$= FL = H$; endlich werde die zu bestimmende Stärke $DE = GH = x$ gesetzt. Ein Kubikfuß des Materials der Mauern wiege q Pfunde, und des Materials des scheidrechten Bogens p Pfunde.

Der scheidrechte Bogen wird nun im Gleichgewicht erhalten 1) durch sein eigenes Gewicht $\left(= \frac{a+b}{2} hlp\right)$ nebst noch dem Gewichte dessen, was das Gewölbe in seiner Mitte zu tragen hat (und dieses Gesammtgewicht werde durch P bezeichnet); und 2) durch die beiden Drucke der Mauern gegen den scheidrechten Bogen, welche senkrecht auf die Fugen CD und FG gerichtet, unbekannt sind und durch Q bezeichnet werden mögen, und welche (nach §. 26.) dem Drucke gleich sind, die der scheidrechte Bogen auf die Mauern ausübt. Ist α der spitze Winkel, den die Fugen CD und FG mit dem Horizont machen, so daß $\frac{2h}{a-b} = tg\,\alpha$ ist, so findet man unter den 3 Gleichungen des Gleichgewichts zwei identische, und noch folgende:

$$\text{I.} \qquad P - 2Q \cdot \cos\alpha = 0; \quad \text{also} \quad Q = \frac{\frac{1}{2}P}{\cos\alpha},$$

wenn man die Reibung nicht berücksichtigt. (Vgl. §. 35.) — Diesen Druck Q des eingekeilten scheidrechten Bogens gegen die Mauern kann man sich bei C und F wirksam denken, in den Richtungen CM und FN, welche mit den Vertikalen CB und FL den Winkel α bilden; weil im Falle die Mauern umkanten, die Drucke in C und F noch wirksam sind.

Die Dicke der Mauer $ED = x$ und, — wenn man $a - b = c$ setzt, — $AB = x + \frac{1}{2}c$ muß nun so groß seyn, daß wenn die Mauer um A kanten will, das eigene Gewicht derselben zurückkantet, so daß die statischen Momente, in Bezug auf A als Centrum genommen, einander gleich sind. Nun ist das statische Moment von Q in der Richtung CM, — weil man Q in $Q \cdot \sin\alpha$ (horizontal) und $Q \cdot \cos\alpha$ (vertikal nach unten) zerlegen kann, —

$$= Q \cdot \sin\alpha \cdot H - Q \cdot \cos\alpha \cdot (x + \tfrac{1}{2}c)$$
$$= \tfrac{1}{2}P \cdot tg\,\alpha \cdot H - \tfrac{1}{2}P(x + \tfrac{1}{2}c).$$

Das Rückkantungs-Moment (d. h. die Stabilität) der Mauer ist dagegen

$$= (H+h)\cdot x\cdot l\cdot q\times\tfrac{1}{2}x + H\cdot\tfrac{1}{2}c\cdot l\cdot q\cdot(x+\tfrac{1}{4}c) + \tfrac{1}{4}c\cdot h\cdot l\cdot q\cdot(x+\tfrac{1}{6}c).$$

Die Gleichsetzung dieser beiden statischen Momente giebt die Gleichung

$$\text{II.}\quad (H+h)lq\cdot x^2 + (cHlq+\tfrac{1}{2}chlq+P)\cdot x + \tfrac{1}{4}c^2Hlq + \tfrac{1}{12}c^2hlq + \tfrac{1}{2}cP - HP\cdot tg\,\alpha = 0,$$

woraus die Breite x gefunden werden kann.

1) Für $a = 110''$, $b = 100''$, also $c = 10''$, $h = 24''$, $H = 80''$, $p = q$, endlich wenn P bloß das Gewicht des scheidrechten Gewölbes allein ist, findet sich hieraus

$$x^2 + \frac{430}{13}x - \frac{119110}{13} = 0; \quad \text{also} \quad x = 80'',6,$$

oder

2) für $a = 120''$, $b = 100''$, also $c = 20''$, $h = 24''$, $H = 140''$, $p = q$, und wenn wiederum unter P bloß das Gewicht des Gewölbes allein verstanden wird, findet sich dagegen

$$x^2 + \frac{1420}{41}x - \frac{211460}{41} = 0,$$

woraus $x = 56'',6$ hervorgeht.

Anmerkung. Rechnet man aber die Reibung in den Fugen CD und FG, so wird der Druck Q viel geringer, und daher findet sich dann auch die nöthige Stärke der Widerlager viel geringer.

§. 125.

Die Stärke der Widerlager bei einem kreisförmigen Gewölbe zu bestimmen (Fig. 69.) von welchem ABINCDLKA ein durch den Schwer-Punkt desselben gehender Querschnitt ist, während der Mittelpunkt der beiden concentrischen Kreise AKLD und BINC in O, und W·AOM = W·MOC = α, OA = OD = R, sowie OB = OC = r seyn mag.

Es sey die Länge des Gewölbes = l, die Höhe CG der Widerlager = h; die erforderliche Stärke GF = x, welche zunächst unter der Voraussetzung gesucht werden mag, daß ein Theil KINL des Bogens mit den Fugen KI und LN (welche unter sich den

Winkel 2β, und mit der Vertikale OM den Winkel β machen), lose aufsitzt, also wie ein Keil (§. 35.) wirkt. Ist nun P das Gewicht dieses Keils nebst dem, was das Gewölbe in seiner Mitte zu tragen hat, so bringt dieser Druck P wiederum zwei Drucke Q senkrecht auf die Fugen KI und NL hervor, gegeben durch die Gleichung

$$Q = \frac{P}{2 \sin \beta}.$$

Diese Drucke wirken in I und N, und der eine in N zerlegt sich in einen horizontalen, $= Q \cdot \cos \beta$ oder $= \frac{1}{2} P \cdot \operatorname{cotg} \beta$, und in einen vertikalen, $= Q \cdot \sin \beta$ oder $= \frac{1}{2} P$. Der erstere hat in Bezug auf das Centrum F das statische Moment

$$= \tfrac{1}{2} P \cdot \operatorname{cotg} \beta \times [h + r \cdot (\cos \beta - \cos \alpha)];$$

der andere hat das statische Moment

$$= -\tfrac{1}{2} P \times (x + r \cdot \sin \alpha - r \cdot \sin \beta).$$

Daher ist das statische Moment von Q, d. h. die Summe der beiden vorstehenden Ausdrücke,

$$\text{I.} \cdots \quad = \tfrac{1}{2} P \cdot \left[h \cdot \operatorname{cotg} \beta + r \cdot \frac{1 - \cos(\alpha - \beta)}{\sin \beta} - x \right].$$

Nun muß das Rückkantungs-Moment (die Stabilität) der Mauer nebst dem daran festen Stück NLCD des Bogens berechnet werden. Es ist aber der Inhalt des Fugenstücks NLCD, wenn man α und β nicht in Graden, sondern im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt sich denkt, $= \frac{1}{2} l (R^2 - r^2)(\alpha - \beta)$; und der Schwer-Punkt H dieses Bogenstückes liegt so, daß

$$OH = \tfrac{2}{3} \frac{\text{Sekt. OLD} \times R - \text{Sekt. ONC} \times r}{\text{Sekt. OLD} - \text{Sekt. ONC}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\frac{1}{2}(\alpha - \beta)},$$

also

$$OH = \tfrac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

ist, während OH mit OM den Winkel $\beta + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ d. h. den Winkel $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ macht. Die Stabilität dieses Bogenstückes in Bezug auf F ist daher, wenn p das Gewicht eines Kubikfußes des Bogen-Materials vorstellt,

$= \frac{1}{2}l(R^2-r^2)(\alpha-\beta)p \times [x+r\cdot sin\,\alpha - OH\cdot sin\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)]$

$= \frac{1}{2}lp(R^2-r^2)(\alpha-\beta)\cdot\left[x+r\cdot sin\,\alpha-\frac{2}{3}\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\cdot\frac{sin\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot sin\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\right]$

oder

$$\text{II.} \cdots = \frac{1}{2}lp(R^2-r^2)(\alpha-\beta)\cdot\left(x+r\cdot sin\,\alpha-\frac{2}{3}\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\cdot\frac{cos\,\beta-cos\,\alpha}{\alpha-\beta}\right).$$

Die Stabilität der Mauer ist endlich, wenn das Gewicht eines Kubikfußes derselben durch q bezeichnet wird,

$$\text{III.} \cdots = [h+(R-r)\cdot cos\,\alpha]\cdot[x-(R-r)\cdot sin\,\alpha]\cdot l\cdot q \times \tfrac{1}{2}[x-(R-r)\cdot sin\,\alpha]$$
$$+h(R-r)\cdot sin\,\alpha\cdot l\cdot q \times [x-\tfrac{1}{2}(R-r)\cdot sin\,\alpha]$$
$$+\tfrac{1}{2}(R-r)^2\cdot sin\,\alpha\cdot cos\,\alpha\cdot l\cdot q\times[x-\tfrac{2}{3}(R-r)\cdot sin\,\alpha].$$

Setzt man nun das Moment I. der Summe der Momente II. und III. gleich, so hat man die Gleichung, aus welcher die Breite x gefunden werden kann.

Nimmt man statt P bloß das Gewicht des Bogenstücks KINR, welches $=(R^2-r^2)\beta lp$ ist, so wird, wenn man der Kürze wegen a^3 statt R^3-r^3, und b^2 statt R^2-r^2, so wie n statt $\frac{p}{q}$ schreibt, diese Gleichung, nach x geordnet, so aussehen:

$$\text{IV.} \cdots n[h+(R-r)cos\,\alpha]\cdot x^2+[b^2\alpha-n(R-r)^2 sin\,\alpha\cdot cos\,\alpha]\cdot x$$
$$= \tfrac{2}{3}a^3(cos\,\beta-cos\,\alpha)+b^2h\beta\cdot cotg\,\beta-b^2r\alpha\cdot sin\,\alpha$$
$$-\tfrac{1}{3}n(R-r)^3(sin\,\alpha)^2\cdot cos\,\alpha+b^2r\beta\cdot\frac{1-cos\,\alpha\cdot cos\,\beta}{sin\,\beta}.$$

Hat man aber auf diese Weise x in β ausgedrückt, so kann man nach dem Werth von β fragen, für welchen x ein Maximum wird. Die Lehre vom Größten und Kleinsten giebt $\beta=0$, in welchem Falle $\frac{\beta}{sin\,\beta}=1$, $\beta\cdot cotg\,\beta=\frac{\beta}{tg\,\beta}=1$, $cos\,\beta=1$ genommen werden muß. Die vorstehende Gleichung IV. geht dann über in

$$\text{V.} \cdots \frac{p}{q}[h+(R-r)cos\,\alpha]\cdot x^2+\left[(R^2-r^2)\alpha-\frac{p}{3q}(R-r)^2\cdot sin\,\alpha\cdot cos\,\alpha\right]\cdot x$$
$$= \tfrac{4}{3}(R^3-r^3)(sin\,\tfrac{1}{2}\alpha)^2+(R^2-r^2)h-(R^2-r^2)r\alpha\cdot sin\,\alpha$$
$$-\frac{p}{3q}(R-r)^3\cdot(sin\,\alpha)^2\cdot cos\,\alpha+2(R^2-r^2)r\cdot(sin\,\tfrac{1}{2}\alpha)^2;$$

und sie giebt die größeste Breite x, welche die Mauer haben muß, um, wie auch die Fugen des Gewölbes reißen mögen, hinlänglich Stabilität zu gewähren, wenn nur das Gewölbe sonst nichts zu tragen hat.

Ist die Höhe im Lichten d. h. der Pfeil des Bogens BC von der Sehne BC ab $= 2'$, die Weite im Lichten $= 12'$, so berechnet sich daraus der Durchmesser 2r des kleineren Kreises $= 20$, also $r = 10$. Ist nun die Höhe der Gewölbsteine $= 1'$, so hat man $R = 11$. Außerdem sey $p = q$ und $h = 8'$, so findet man $\sin\alpha = 0{,}6$; $\cos\alpha = 0{,}8$; und $\alpha = 0{,}6435$; so wie zuletzt $x = 3{,}75$.

§. 126.

Denken wir uns wie im §. 32. Behufs einer Brücke, Balken gegen einander gespannt wie Fig. 26. AC und BC, welche bei C verklammert oder verzapft sind, und sich bei A und B gegen die oberen Enden von rechtwinklig parallelepipedalischen Pfeilern stemmen, während letztere die Höhe h, die Breite b und die Stärke a haben. Wie groß muß a seyn, damit die Stabilität der Pfeiler den Druck der Balken gerade aushält, unter der Voraussetzung, daß das gleichmäßig vertheilte Gewicht, welches die Balken drückt, in eines jeden Mitte M wirkt und $= P$ ist, daß jeder der Balken die Länge l hat und mit dem Horizont den Winkel α macht, endlich daß auf der einen Seite in D noch eine besondere Belastung (z. B. eine aufgefahrene Kanone) vom Gewicht Q wirkt, während $AD = d$ gegeben ist.

Man muß hier vor allen Dingen die horizontalen und vertikalen Drucke x, y, x', y' (s. Fig. 26.) aufsuchen, welche die Balken gegen die Pfeiler, also auch die Pfeiler gegen die Balken ausüben. Der Balken links wird im Gleichgewicht erhalten (nach §. 26.) von den Kräften: x (nach oben), y (nach rechts hin) P, Q (nach unten), v (nach oben) und z (nach links hin) und man erhält daher die 3 Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich:

1) $y = z$;

2) $x + v = P + Q$;

3) $P \times \frac{1}{2} l \cdot \cos\alpha + Q \times d \cdot \cos\alpha - z \times l \cdot \sin\alpha - v \times l \cdot \cos\alpha = 0$.

Der Balken zur Rechten wird im Gleichgewicht erhalten durch: x' (nach oben), y' (nach links hin), P (nach unten), v (nach unten) und z (nach rechts hin); und man hat daher noch diese anderen 3 Gleichungen des Gleichgewichts, nämlich:

4) $z = y'$;

5) $x' = v + P$;

6) $P \times \frac{1}{2} l \cdot \cos\alpha - z \times l \cdot \sin\alpha + v \times l \cdot \cos\alpha = 0$.

Löst man diese 6 Gleichungen auf, so erhält man die 6 unbekannten Drucke x, y, z, x', y', v ohne Weiteres. Da nämlich die Gleichungen 3. und 6. bloß z und v enthalten, so geben solche augenblicklich

7) $z = \frac{Pl + Qd}{2l} \cdot \cot g\,\alpha$ und 8) $v = \frac{Q \cdot d}{2l}$.

Die 2. und 5. geben dann

9) $x = P + \frac{Q \cdot (2l - d)}{2l}$ und 10) $x' = P + \frac{Q \cdot d}{2l}$.

Zuletzt geben die Gleichungen 1. und 4. noch

11) $y = y' = z = \frac{P \cdot l + Q \cdot d}{2l} \cdot \cot g\,\alpha$.

Ist nun EAFGHK der Pfeiler, also $EK = h$, $HK = a$, und werden die kleinen Längen AE und AF bezüglich durch a' und h' bezeichnet und als gegeben angesehen, so hat der horizontale Druck y gegen den Pfeiler das Umkantungs-Moment (um H) $= y \cdot h$, während der vertikale Druck x gegen den Pfeiler das Umkantungs-Moment $= -x(a - a')$ hat. Das gesammte Umkantungs-Moment (um H) ist daher $= y \cdot h - x \cdot (a - a')$. Ist nun p das Gewicht eines Kubikfußes des Pfeilers, so ist sein Rückkantungs-Moment (d. h. seine Stabilität) um H

$$= b(a - a')(h + h')p \times \tfrac{1}{2}(a - a') + ba'hp(a - \tfrac{1}{2}a').$$

Dies giebt die Gleichung

$$y \cdot h - x \cdot (a - a') = \tfrac{1}{2} b(h + h')p(a - a')^2 + ba'hp \cdot (a - \tfrac{1}{2}a'),$$

oder, wenn man $a - a' = u$ setzt, und nach u ordnet,

12) $\frac{1}{2} b(h + h')p \cdot u^2 + (ba'hp + x) \cdot u = y \cdot h - \frac{1}{2} ba'hpa'$.

Werden nun hier herein statt x und y ihre Werthe aus 9. und

11. substituirt, so giebt diese Gleichung 12. sogleich u, also auch $u + a'$, d. h. die ganze Stärke a der Mauer ohne Weiteres.

Und setzt man hier noch statt x und y jetzt x' und y', so wie u' statt u, so erhält man die Stärke $u' + a'$ des anderen Pfeilers.

Anwendungen des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 127.

Wenden wir nun das im §. 49. beschriebene Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, auf mehrere der in den früheren Paragraphen bereits gelösten Aufgaben an.

Suchen wir zunächst eine Kraft P_0, welche statt $n-1$ gegebenen Kräften P_1, P_2, $P_3 \cdots P_{n-1}$, die einen Atom O gleichzeitig angreifen, gesetzt werden kann.

Zu dem Ende suchen wir eine Kraft P_n, welche mit den $n-1$ gegebenen Kräften das Gleichgewicht hält; und nehmen dann P_0 der P_n gleich und entgegen.

Um nun die Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts zu erhalten zwischen den n Kräften P_1, P_2, $P_3 \cdots P_{n-1}$ und P_n, so legen wir durch O irgend eine Gerade OX, und rücken den Angriffs-Punkt O der Kräfte in dieser Geraden um ein unendlich kleines Stück w fort. Sind nun α_1, α_2, $\alpha_3 \cdots \alpha_{n-1}$, α_n die Winkel, welche diese Gerade OX mit den Kräften P_1, $P_2 \cdots P_n$ macht, so sind $w \cdot \cos\alpha_1$, $w \cdot \cos\alpha_2$, $w \cdot \cos\alpha_3, \cdots w \cdot \cos\alpha_n$ die virtuellen Geschwindigkeiten, d. h. der auf die Richtungen dieser Kräfte projicirte Weg; daher sind $w \cdot P_1 \cdot \cos\alpha_1$, $w \cdot P_2 \cdot \cos\alpha_2$, $w \cdot P_3 \cdot \cos\alpha_3, \cdots w \cdot P_n \cdot \cos\alpha_n$ die Momente der virtuellen Geschwindigkeiten, deren Summe $= 0$ seyn soll. Dies giebt aber die Gleichung des Gleichgewichts (wenn durch w wegdividirt wird)

$$P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + \cdots + P_{n-1} \cdot \cos\alpha_{n-1} + P_n \cdot \cos\alpha_n = 0.$$

Läßt man nun den Atom O noch zwei andere solche Wege machen, so erhält man, im Falle man die Richtungen OY, OZ dieser Wege senkrecht auf OX und senkrecht auf einander nimmt,

dieselben drei Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts, welche wir auch im §. 8. Nr. 1. erhalten haben.

§. 128.

Betrachten wir nun einen festen Körper, der von n parallelen Kräften P_1, P_2, $\cdots P_n$ an den Punkten A_1, A_2, $\cdots A_n$ angegriffen wird, welche sich im Gleichgewicht halten. Legen wir durch einen beliebigen Punkt O eine Gerade OZ, welche mit den parallelen Kräften parallel läuft; und denken wir uns zuerst den angegriffenen Körper so fortgerückt, daß alle Angriffs-Punkte A_1, $A_2 \cdots A_n$ parallel mit OZ gleiche Wege w beschreiben, so sind $+w$ oder $-w$ die virtuellen Geschwindigkeiten, je nachdem die Kraft in der Richtung von OZ, oder in der entgegengesetzten Richtung wirkt. Also sind die Momente der virtuellen Geschwindigkeiten $P_1 w$, $P_2 w$, $P_3 w \cdots P_n w$, sobald man nur die Werthe der verschiedenen P positiv oder negativ in Rechnung bringt. Dies giebt nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten eine Gleichung, welche, wenn sie durch w wegdividirt wird, in

I. $$P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = 0$$

übergeht.

Um für dasselbe angegriffene System noch mehr Gleichgewichts-Gleichungen zu erhalten, muß man die Angriffs-Punkte abermals und abermals verrücken. Wollte man die Angriffs-Punkte in einer Richtung parallel mit sich fortrücken lassen, welche mit der Richtung der parallelen Kräfte den Winkel ψ macht, so wären $\pm w \cdot \cos\psi$ die virtuellen Geschwindigkeiten; und deshalb würde man genau dieselbe Gleichgewichts-Gleichung erhalten wie oben. Man muß daher den Versuch machen und den Körper drehen, etwa um die Axe OY (die wir uns auf OZ senkrecht denken wollen, während OX wieder auf beiden senkrecht seyn mag). Ist nun θ der unendlich kleine Winkel, um welchen sich der Körper, also alle Angriffs-Punkte gedreht haben, so hat der Angriffs-Punkt A, dessen drei Koordinaten-Werthe x, y, z seyn mögen und der also von OY um $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ abliegt, den Weg w

$= r \cdot \theta$ gemacht, den wir uns, weil unendlich klein deshalb geradlinig und auf r senkrecht denken können. Dieser Weg w macht daher mit der Kraft P oder mit OZ einen Winkel, der, wenn A_1 die Projektion von A auf die Ebene XOZ vorstellt, der Neben-Winkel von A_1OX, oder dem A_1OX selbst gleich ist, je nachdem P die Richtung OZ oder die entgegengesetzte Richtung hat, dessen Kosinus also $= \pm \frac{x}{r}$ ist. Die virtuelle Geschwindigkeit ist daher nun $= r\theta \times \left(\pm \frac{x}{r}\right)$ d. h. $= \pm x \cdot \theta$, und das Moment der virtuellen Geschwindigkeit $= \pm P \cdot x\theta$, oder $= Px\theta$, wenn P selbst einmal positiv, das anderemal negativ genommen wird. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten giebt daher noch die Gleichung

II. $\Sigma(P \cdot x \cdot \theta) = 0$, oder $\theta \cdot \Sigma(P \cdot x) = 0$, oder $\Sigma(P \cdot x) = 0$.

Läßt man eben so den Körper mit allen Angriffs-Punkten unendlich wenig um OX sich drehen, so erhält man noch die Gleichung

III. $$\Sigma(P \cdot y) = 0.$$

Läßt man den Körper um OZ drehen, so sind, da jetzt die Wege auf den Richtungen der Kräfte senkrecht stehen, die virtuellen Geschwindigkeiten alle der Null gleich, und das Princip giebt die identische Gleichung $0 = 0$. Dasselbe ist der Fall, wenn man den Körper so fortrückt, daß die Angriffs-Punkte Wege beschreiben, die unter sich und mit der Ebene XOY parallel sind.

Läßt man endlich den Körper um eine Axe drehen, welche durch O geht und mit OX, OY, OZ gegebene beliebige Winkel macht, so erhält man eine neue von den vorigen dreien verschiedene Gleichung, wenn man jetzt wieder für diese Wege der Angriffs-Punkte das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gelten läßt. Weil wir aber aus der im §. 11. mitgetheilten Theorie der parallelen Kräfte bereits wissen, daß diese 3 Gleichungen I.—III. das Gleichgewicht b e d i n g e n, so folgt, daß jede neue Gleichung, welche uns das Princip der virtuellen Geschwindig-

keiten noch giebt, nichts weiter als eine Kombination aus diesen 3 Gleichungen seyn kann.

§. 129.

Betrachten wir nun Kräfte, deren Richtungen alle in einer und derselben Ebene sind, die einen Körper gleichzeitig angreifen, und sich dabei im Gleichgewicht halten. Es sey P eine dieser Kräfte, die den Angriffs-Punkt A hat, und mit zweien in der Ebene der Kräfte auf einander senkrecht gedachten Axen die Winkel α und β macht, während x und y die Koordinaten-Werthe dieses Angriffs-Punktes A seyn mögen.

Rückt man den Körper in der Richtung OX fort, so daß alle Angriffs-Punkte gleiche und mit OX parallele Wege w beschreiben, so ist $w \cdot \cos\alpha$ die virtuelle Geschwindigkeit, $Pw \cdot \cos\alpha$ das Moment derselben, und

I. $\Sigma(Pw \cdot \cos\alpha) = 0$ oder $\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0$

die Gleichung, welche aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten hervorgeht.

Rückt man den Körper in der Richtung OY fort, so giebt die Gleichung

II. $$\Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0.$$

Läßt man den Körper um eine durch O gelegte auf XOY senkrechte Gerade drehen, so daß jeder Angriffs-Punkt A einen unendlich kleinen Winkel θ, also einen unendlich kleinen Bogen $r \cdot \theta$ beschreibt, wenn $\sqrt{x^2+y^2} = r$ gesetzt wird, und denkt man sich jede Kraft P in zwei Seiten-Kräfte $P \cdot \cos\alpha$ parallel mit OX und $P \cdot \cos\beta$ parallel mit OY zerlegt, und diese letzteren statt P selbst genommen, so sind die virtuellen Geschwindigkeiten von $P \cdot \cos\alpha$ und $P \cdot \cos\beta$ bezüglich $\pm r\theta \cdot \frac{y}{r}$ und $\mp r\theta \cdot \frac{x}{r}$ d. h. $\pm\theta \cdot y$ und $\mp\theta \cdot x$, so daß die Summe der Momente der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\pm\theta \cdot \Sigma(Py \cdot \cos\alpha - Px \cdot \cos\beta),$$

d. h.

d. h. das θfache der Summe der **statischen** Momente wird *).
Das Princip giebt daher

III. $\Sigma P(y \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\beta) = 0.$

Jedes andere Fortrücken des angegriffenen Körpers würde nach dem Principe immer wieder eine Gleichgewichts-Gleichung geben; allein weil nach §.§. 24. 25. diese 3 Gleichungen I. — III. bereits das Gleichgewicht **bedingen**, so kann jede neue Gleichung nichts anderes als eine algebraische (trigonometrische) Verbindung der drei bereits erhaltenen seyn.

§. 130.

Wenden wir nun das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten auf den Fall an, wo beliebig viel Kräfte im Raume einen festen Körper gleichzeitig angreifen und sich einander im Gleichgewicht halten. Es sey P eine dieser Kräfte; ferner seyen α, β, γ die Winkel, welche solche mit dreien auf einander senkrechten Koordinaten-Axen OX, OY, OZ macht; endlich mögen x, y, z die Koordinaten-Werthe ihres Angriffs-Punktes A vorstellen. Denkt man sich nun den Körper in der Richtung OX um unendlich wenig (w) fortgerückt, so ist $w \cdot \cos\alpha$ die virtuelle Geschwindigkeit; also (nach dem Princip)

I. $w \cdot \Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0,$ also $\Sigma(P \cdot \cos\alpha) = 0.$

Denkt man sich nachher den Körper in den Richtungen OY und OZ unendlich wenig fortgerückt, so giebt das Princip

II. $\Sigma(P \cdot \cos\beta) = 0$ und III. $\Sigma(P \cdot \cos\gamma) = 0.$

Denkt man sich aber nun das System um OZ, und zwar

*) Es war nicht nöthig die Kraft P in die beiden Seiten-Kräfte zu zerlegen. Nennt man nämlich p die senkrechte Entfernung des Punktes O von der Richtung der Kraft, so ist $p = \pm r \cdot \cos\psi$, wenn ψ den Winkel vorstellt, den der auf r senkrechte Weg $r \cdot \theta$ mit der Richtung der Kraft macht, so daß $r\theta \cdot \cos\psi$, d. h. $\pm r\theta \cdot \frac{p}{r}$, d. h. $\pm p\theta$ die virtuelle Geschwindigkeit und $\pm Pp \cdot \theta$ das Moment der virtuellen Geschwindigkeit ist. Also sieht man wieder, wie dieses Moment das θfache des **statischen** Momentes Pp ist.

um einen unendlich kleinen Winkel θ gedreht, so ist der Weg w von A (wenn r die senkrechte Entfernung dieses Punktes A von der OZ ist, so daß man $r^2 = x^2 + y^2$ hat) $= r \cdot \theta$ (d. h. $w = r \cdot \theta$). Denkt man sich nun P zerlegt in $P \cdot cos \gamma$ parallel mit OZ und $P \cdot sin \gamma$ parallel mit der Ebene XOY, so daß $P' = P \cdot sin \gamma$ die Projektion der als Linie ausgedrückten Kraft P auf die Ebene XOY ist; denkt man sich ferner die Gerade p, welche eben so wohl auf OZ als auch auf $P \cdot sin \gamma$ senkrecht steht; — so ist solche der Senkrechten p gleich, welche aus O auf die Projektion P′ gefällt werden kann, und dabei macht der Weg w mit der Kraft $P \cdot sin \gamma$ denselben Winkel ψ (oder dessen Nebenwinkel) den r mit p macht und dessen Kosinus $= \frac{p}{r}$ ist. Daher ist $\pm w \cdot cos \psi$ d. h. $\pm r\theta \cdot \frac{p}{r}$ d. h. $\pm \theta p$ die virtuelle Geschwindigkeit für die Kraft $P \cdot sin \gamma$ oder P′. Das Moment dieser virtuellen Geschwindigkeit ist deshalb $= \pm \theta p P'$. Von der anderen Kraft $P \cdot cos \gamma$, die parallel mit OZ, also senkrecht auf XOY geht, ist die virtuelle Geschwindigkeit, also auch das Moment, der Null gleich. Also ist die Summe aller Momente $= \Sigma(\pm p \cdot P' \cdot \theta)$ d. h. $= \theta \cdot \Sigma(\pm p \cdot P')$; und das Princip giebt daher aus diesem Verrücken der Angriffs-Punkte die Gleichung

IV. $\Sigma(\pm p \cdot P') = 0$, oder $L = 0$,

wenn man unter L die Summe aller dieser statischen Momente aller Projektions-Kräfte P′ (auf die Ebene XOY) in Bezug auf das Centrum O genommen, versteht.

Eine drehende Verrückung der Angriffs-Punkte A um die beiden anderen Axen OY und OX giebt die beiden anderen Gleichungen

V. $M = 0$ und VI. $N = 0$,

welche wir im §. 48. für das Gleichgewicht dieser Kräfte gefunden haben.

Jede weitere Verrückung der Angriffs-Punkte (während solche unter sich fest bleiben) giebt, wenn man das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten geltend macht, eine neue Gleichung des

Gleichgewichts, die aber, weil die vorstehenden sechs Gleichungen nach §. 48. das Gleichgewicht bedingen, in diesen letztgenannten Gleichungen allemal enthalten seyn muß.

Anmerkung 1. In so fern die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten in den Fällen der §. §. 127—130. genau dieselben Resultate liefert, die wir früher bereits für das Gleichgewicht in denselben Fällen gefunden haben; und da die Axen willkührlich gelegt werden können, und jede Verrückung entweder eine fortschreitende oder eine drehende, oder fortschreitend und drehend zugleich ist, so bilden die vorstehenden §. §. 127—130. die Grundlage zu einem Beweise dieses Princips der virtuellen Geschwindigkeiten für angegriffene feste Körper.

Auf lose Systeme kann man dann natürlich das Princip ohne Weiteres anwenden, wenn man genau nach §. 26. und §. 27. verfährt, d. h. die Drucke und Gegendrucke in Rechnung bringt und jeden einzelnen Theil des Systems als festen Körper für sich im Gleichgewicht voraussetzt. Man bekommt dann für jeden festen Theil des Systems durch wiederholte Anwendung des Princips die nöthige Anzahl von Gleichgewichts-Gleichungen.

Anmerkung 2. I. Man kann aber das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten auf lose Systeme auch so anwenden, daß man gleichzeitig jeden festen Theil des Systems für sich beliebig verrückt sich denkt, die wirklichen Wege eines jeden Angriffs-Punktes, auf die Richtung der diesen Punkt angreifenden Kräfte projicirt, diese Projektion mit der Kraft multiplicirt und dann die Summe aller dieser Produkte in allen Theilen des Systems zusammen, der Null gleich nimmt, wenn man nur nicht unterläßt in beiden Berührungs-Punkten zweier fester Theile (während des Gleichgewichts) die Drucke und Gegendrucke, aber auch Reibung und (Gegen-) Reibung als Kräfte nach §. §. 26. u. 27. gehörig anzubringen, d. h. in jedem der beiden Punkte (wovon der eine in dem einen festen Theil, der andere in dem anderen festen Theil liegt) auch nachdem sie von einander weg gerückt worden seyn sollten, den Druck und die Reibung als zwei Kräfte in Rechnung zu setzen (so daß nicht bloß der Druck zweimal,

sondern auch die Reibung an derselben Stelle zweimal in Rechnung gebracht zu seyn scheint).

Der Grund davon ist sehr leicht einzusehen. Waren nämlich, wenn wir ein loses System uns denken, welches nur aus zwei festen Theilen besteht, $F_1 = 0$ eine Gleichgewichts-Gleichung für den einen festen Theil, und $F_2 = 0$ eine analoge für den anderen; und ist w der (gerade oder Winkel-) Weg der Angriffs-Punkte des ersteren festen Theils, v dagegen der (gerade oder Winkel-) Weg der Angriffs-Punkte des anderen, so giebt das beschriebene Verfahren offenbar die Gleichung

$$w \cdot F_1 \pm v \cdot F_2 = 0,$$

welche offenbar auch eine richtige ist.

II. Soll aber die entstehende Gleichung die Wege w und v nicht enthalten, so muß man sie beide einander gleich nehmen, so daß man durch sie wegdividiren kann. Dies giebt dann die Gleichung

$$F_1 \pm F_2 = 0,$$

welche natürlich auch wieder eine richtige ist, sobald nur das System wirklich im Gleichgewicht stand, so daß die Gleichungen $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$, jede für sich statt haben.

III. Nimmt man die Wege w und v nicht einander gleich, sondern in dem Verhältniß wie 1 : k, so ist die neue Gleichung

$$F_1 \pm k \cdot F_2 = 0$$

natürlich noch richtig.

IV. Nimmt man die Wege w und v in der Ebene, in welcher eine Reibung statt findet, so sind sie senkrecht auf die an dieser Stelle der Reibung vorhandenen Drucke genommen, und die virtuellen Geschwindigkeiten in Bezug auf diese letzteren sind dann der Null gleich, so daß die Drucke dann in die Gleichgewichts-Gleichungen gar nicht eingehen (wohl aber die Reibungen).

V. Nimmt man aber w und v nicht bloß in dieser Ebene, sondern auch in einer und derselben Richtung und einander gleich, so müssen aus der Gleichung auch die Reibungen heraus fallen, weil sie entgegengesetzte Richtungen haben und übrigens gleich sind, so daß die Momente ihrer virtuellen Geschwindigkeiten eben-

falls gleich, aber mit verschiedenem Vorzeichen behaftet erscheinen, ihre Summe also $= 0$ ist *).

Wir wollen nun das Princip auf einige der früher schon mitgetheilten praktischen Aufgaben in Anwendung bringen.

§. 131.

Nehmen wir das Problem der schiefen Ebene des §. 34 (Fig. 28.).

Denken wir uns zuerst den Körper auf der schiefen Ebene, aber in einer auf AB senkrechten Richtung verrückt, so sind alle virtuellen Geschwindigkeiten der Null gleich und das Princip giebt die identische Gleichung $0 = 0$. — Denkt man sich den Körper in der Richtung AB verrückt, so daß alle Angriffs-Punkte S und E mit AB parallele und gleiche Wege w beschrieben haben, so sind die Momente von P, Q, μR bezüglich $-P \cdot w \cdot \sin\alpha$, $Q \cdot w \cdot \cos(\alpha-\beta)$, $\pm\mu Rw$, je nachdem P oder Q die Reibung überwinden soll. Dies giebt (nach dem Princip) die Gleichung

1) $$-P \cdot \sin\alpha + Q \cdot \cos(\alpha-\beta) \pm \mu R = 0,$$

in so fern nach §. 130. Anmerkung 2. IV. das Moment des Druckes R der Null gleich ist.

Denkt man sich das System in der Richtung des Druckes R fortgerückt, so daß jeder Angriffs-Punkt parallel mit diesem Druck den Weg w beschrieben hat, so sind von den Kräften P, Q, R die Momente der virtuellen Geschwindigkeiten bezüglich $-P \cdot w \cdot \cos\alpha$, $-Q \cdot w \cdot \sin(\alpha-\beta)$, $R \cdot w$, so daß das Princip dasmal die Gleichung

2) $$-P \cdot \cos\alpha - Q \cdot \sin(\alpha-\beta) + R = 0$$

liefert.

---

*) Diese letztere Wahrheit zeigt sich auch von einer anderen Seite als solche. Ist nämlich das lose System im Gleichgewicht, so bleibt es natürlich auch noch im Gleichgewicht, wenn alle losen Theile unter sich fest verbunden gedacht werden, so daß das ganze System ein einziger fester Körper wird, der im Gleichgewicht ist, ohne diese Drucke und Reibungen. Dann aber, wenn man das Ganze verrückt, verrückt man auch jeden Theil um gleich viel und in derselben Richtung, sey die Verrückung im wahren Wege oder im Winkel-Wege gedacht.

Eine dritte, in den beiden vorigen nicht enthaltene Gleichung erhält man, wenn man das System um irgend eine auf der Ebene der Kräfte senkrechte (und z. B. durch A hindurchgehende) Axe drehend verrückt, so daß der angegriffene Körper um diesen Punkt A einen (unendlich kleinen) Winkel-Weg θ gemacht hat.

So hat man, wenn aus 1. und 2. R eliminirt, und Q gefunden wird, genau die Auflösung, wie sie auch im §. 34. für dasselbe Problem gefunden worden ist.

§. 132.

Wenden wir jetzt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zur Lösung der Aufgabe des Keils §. 35. (Fig. 29.) an. Denken wir uns nun zuerst das ganze aus allen 3 Theilen bestehende System horizontal zur Rechten hin fortgerückt, so daß w der Weg aller Angriffs-Punkte ist, — so findet sich — theils weil einige der virtuellen Geschwindigkeiten (für Q, für die beiden P und die beiden N) der Null gleich werden, theils weil die übrigen Momente paarweise gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen versehen erscheinen — eine Gleichung, die identisch $0 = 0$ ist.

Denkt man sich das ganze System vertikal nach unten gerückt, so daß jeder Angriffs-Punkt in vertikaler Richtung den Weg w beschreibt, so erhält man die Gleichung

1) $Q \cdot w + 2P \cdot w - 2N \cdot w = 0$ oder $Q + 2P - 2N = 0$ *).

Denkt man das ganze System in einer auf die Ebene der Kräfte senkrechten Richtung verrückt, so muß man allemal die identische Gleichung $0 = 0$ bekommen, weil nun alle virtuellen Geschwindigkeiten der Null gleich sind.

Denkt man sich das ganze System um O gedreht, so daß jeder Angriffs-Punkt in der Ebene der Kraft einen unendlich klei-

---

*) Dieselbe Gleichung bekommt man, wenn man im §. 35. die Gleichung 3. doppelt nimmt (weil sie auch für den zweiten Klotz noch existirt) und von der 1. subtrahirt.

nen Winkel-Weg θ beschreibt, so erhält man mittelst des Princips genau dieselbe Gleichung, die man auch erhalten würde, wenn man das ganze System als einen einzigen im Gleichgewicht sich befindlichen festen Körper ansehen, und für alle Kräfte (mit Ausnahme der 4 Drucke und der 4 Reibungen an den beiden Punkten E) die Summe der statischen Momente in Bezug auf das Centrum O der Null gleich setzen wollte, und diese Gleichung wird eine identische von der Form $0 = 0$, weil eben so viele Kräfte nach der einen Seite zu drehen wie nach der anderen.

Macht man es aber gerade so, läßt jedoch den Klotz zur Linken ganz aus dem Spiel, so erhält man, weil nun der Druck R von E links nach R rechts hin, so wie die Reibung μR an dieser Stelle in der Richtung EA in Rechnung gebracht werden muß (in so fern nur dann die übrigen beiden Theile des Systems als einen einzigen im Gleichgewicht sich befindenden Körper bildend angesehen werden können), so findet sich genau die Gleichung 4. des §. 35., in so fern die von dem Keile herrührenden Momente der virtuellen Geschwindigkeiten in ihrer Summe Null geben.

Denkt man sich den Klotz zur Rechten zuerst um einen beliebigen Weg v horizontal und zur Rechten hin verrückt, dann aber den Keil vertikal herunter gerückt, so daß alle Angriffs-Punkte einen gleichen und parallelen Weg w beschreiben, und nimmt man nun, unbekümmert darum, ob die Wege v und w gerade in dem Verhältniß gewesen sind, daß jetzt der Keil an den Klotz wieder anliegt, oder nicht, die Summe aller Momente der virtuellen Geschwindigkeiten von dem Keil und diesem einen Klotz, so erhält man eine Gleichung, die auch aus den Gleichungen 1. und 2. des §. 35. hervorgeht, wenn man die 2. mit v, die 1. mit w multiplicirt und das letztere vom ersteren subtrahirt (Vergl. III. der 2ten Anmerkung zu dem §. 130.). — Aus dieser Gleichung zieht man wieder die 2 Gleichungen 1. und 2. des §. 35. selbst, wenn man das Verhältniß k, von v zu w,

zweimal anders nimmt, oder einmal +k, das andere Mal −k dafür setzt *).

So kann man auch gleichzeitig den anderen Klotz zur Linken um ein beliebiges Stück u in beliebiger Richtung fortgerückt denken und dann von dem Ganzen, unbekümmert darum, ob die Theile nach dem Fortrücken wieder an einander stoßen oder nicht, die Summe der Momente der virtuellen Geschwindigkeiten der Null gleich setzen. Immer erhält man Gleichungen, welche sich auch aus den Gleichungen des §. 38. zusammensetzen lassen, dadurch, daß man sie einzeln mit w, v, u oder mit noch anderen Ausdrücken multiplicirt, und die Resultate dann addirt oder subtrahirt.

Immer aber muß man nach und nach so viele Gleichungen sich verschaffen, als man Unbekannte in ihnen vorfindet, die bestimmt oder eliminirt werden sollen.

§. 133.

Betrachten wir noch die lose Rolle des §. 40. (Fig. 36.). — Denkt man sich das Ganze als einen festen Körper, der a) nach irgend einer Richtung fortgerückt, oder b) um irgend eine Axe unendlich wenig gedreht wird, so erhält man jedes Mal mittelst des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten eine Gleichung, welche aus der Addition zweier Gleichungen hervorgeht, die nach dem Verfahren des §. 40. erhalten werden, wenn man jeden Theil für sich in's Gleichgewicht stellt, aber im Falle a) zur Koordinaten-Axe, auf welche die Kräfte projicirt werden, eine mit obiger Richtung des Fortrückens parallele Gerade nimmt; oder, in dem anderen Falle b), wo die virtuellen Geschwindigkeiten durch eine Drehung erhalten werden, wenn man die zwei Gleichungen des Gleichgewichts der einzelnen Theile addirt, in welchen die Summe der statischen Momente aller, diese einzel-

*) Nimmt man $v = w \cdot tg\alpha$, so liegt auch nach der Verrückung des Keils und des Klotzes, der Keil wiederum am Klotze an, wie wenn der letztere bloß durch das Niederdrücken des Keiles zur Seite geschoben worden wäre.

nen Theile angreifenden Kräfte, der Null gleich gesetzt worden sind, in beiden festen Theilen aber einerlei Centrum der Momente genommen wird, nämlich das Centrum, um welches man sich oben in b) das System gedreht dachte. — Aus diesen Gleichungen werden dann allemal Drucke und Reibungen ganz herausfallen.

Man kann aber auch, während die Gabel nebst Bolzen im absoluten Raume unbeweglich gedacht wird, die Rolle allein beliebig fortschieben oder beliebig drehen, und namentlich auch die Rolle bloß um den unbeweglich gedachten Zapfen drehen; — immer wird man mittelst des Princips eine Gleichung erhalten, in welcher aber Druck und Reibung, oder doch eines von beiden allein, vorkommen werden.

Eben so kann man die Rolle unbeweglich und die Gabel bloß beliebig fortgerückt oder beliebig gedreht denken. Die Anwendung des Princips giebt dann, — so wie bei der nächst vorhergehenden Annahme bloß eine Gleichgewichts-Gleichung für die Rolle allein hervorgehen konnte, — jetzt bloß eine Gleichgewichts-Gleichung für die Gabel allein.

Dann kann man die Rolle beliebig und zugleich auch die Gabel beliebig (fortschreitend oder drehend) verrücken, und, unbekümmert darum, ob die Rolle noch um den Bolzen geht, oder von der Gabel abgerückt ist, oder ob beide in einander hineingerückt sind (beide Theile als geometrische Körper gedacht, die dieses in einander rücken verstatten) das Princip so anwenden, daß man die Summe aller Momente der virtuellen Geschwindigkeiten der Null gleich setzt (in beiden Theilen des losen Systems zusammen).

Denkt man sich hier namentlich die Axe des Bolzens unbeweglich, dann aber, um diese Axe, die Rolle um θ nach einer Richtung, die Gabel aber um θ nach der entgegengesetzten Richtung gedreht, und dann die Summe aller Momente der virtuellen Geschwindigkeiten der Null gleich gesetzt, so erhält man eine Gleichung, in welcher zwar der Druck nicht vorkommt (weil der Weg der Angriffs-Punkte beider Drucke senkrecht auf selbi-

gen steht), wo dagegen die Reibung doppelt vorkommt, weil nun nicht bloß beide Reibungen, sondern auch beide Wege entgegengesetzt (übrigens gleich) sind.

§. 134.

In allen den Fällen, wo man Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts aufsucht unter der Voraussetzung, daß man die Reibung gar nicht berücksichtigen will, muß man die Verrückung immer nur auf den sich reibenden Flächen (um unendlich wenig) statt finden lassen, damit auch (nach §. 130. Anmerk. 2. IV.) die Drucke nicht in Rechnung kommen. Auf diese Weise giebt dann bei einfachen Maschinen das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten augenblicklich die Gleichung zwischen Kraft und Last.

1) Man denke sich z. B. einen Flaschenzug von 3 Paar Rollen (Fig. 41.) im Gleichgewicht. Denkt man sich nun dieses System dadurch verrückt, daß man an dem Seil etwas zieht, so daß der Angriffs-Punkt der Kraft P einen Weg w nach unten macht, so ist jedes der 6 Seile um $\frac{1}{6}$w kürzer geworden, und $\frac{1}{6}$w ist also der Weg der Last Q. Das Princip giebt daher, wenn die Reibungen nicht berücksichtigt werden sollen, die Gleichung

$$w \cdot P - \tfrac{1}{6} w \cdot Q = 0, \quad \text{oder} \quad P = \tfrac{1}{6} Q.$$

2) Denkt man sich einen Rollenzug (Fig. 37.) im Gleichgewicht zwischen Kraft P und Last W, und verrückt man nun den Angriffs-Punkt der Kraft P dadurch, daß man an dem Seil zieht, so daß derselbe einen Weg w nach unten beschreibt, so geht die Gabel der obersten losen Rolle um $\frac{1}{2}$w, die Gabel der nächsten losen Rolle um $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$w d. h. um $\frac{1}{4}$w und daher die Last W um $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$w d. h. um $\frac{1}{8}$w in die Höhe, und das Princip giebt deshalb, sobald keine Reibungen berücksichtigt werden sollen, sogleich

$$P \cdot w - W \cdot \tfrac{1}{8} w = 0 \quad \text{d. h.} \quad P = \tfrac{1}{8} W.$$

(Vergl. §. 43. und §. 42.)

Aufgaben zur Dynamik.

§. 135.

In allen folgenden Aufgaben soll der Widerstand der Luft unberücksichtigt bleiben.

1) Ein Körper fällt 5 Sekunden lang; welche Geschwindigkeit v erlangt er, und wie groß ist der durchlaufene Weg h? — Antw. $v = 156\frac{1}{4}$; $h = 390\frac{5}{8}$ Fuß.

2) Ein Körper fällt frei eine Höhe von 600 Fuß herab; wie viel Zeit t braucht er, und welches ist seine erlangte Geschwindigkeit v? — Antw. $t = \sqrt{\frac{600}{15\frac{5}{8}}} = 6{,}2$ Sekunden; $v = 2\sqrt{15\frac{5}{8} \times 600} = 193{,}6$ Fuß.

3) Ein frei fallender Körper soll eine Geschwindigkeit von 10 Fuß erlangen, die zugehörige Zeit t und die Fallhöhe h zu bestimmen. — Antw. Man findet $t = \frac{v}{2g} = \frac{10}{31\frac{1}{4}} = 0{,}32$ Sekunden und $h = \frac{v^2}{4g} = \frac{100}{4 \times 15\frac{5}{8}} = 1{,}6$ Fuß.

4) Eine Flintenkugel, die lothrecht herunter geschossen wird, hat dadurch eine Anfangs-Geschwindigkeit $c = 150$ erhalten. In wieviel (t) Sekunden durchläuft sie die Höhe von 400 Fuß; und welche Geschwindigkeit v hat sie am Ende? — Antw.

$$t = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4gh}}{2g} = 2{,}174 \text{ Sekunden,}$$

und $$v = \sqrt{c^2 + 4gh} = 217{,}94 \text{ Fuß.}$$

5) Man läßt einen Stein in einen Brunnen fallen; nach 8 Sekunden hört man das Auffallen desselben auf das Wasser. Wie tief x liegt dieses?

Da der Schall eine gleichförmige Bewegung und im Mittel eine Geschwindigkeit von 1075 Fuß hat, so ist die Zeit, in welcher er den Weg x zurückgelegt hat, $= \frac{x}{1075}$ Sekunden, wenn x in Fußen ausgedrückt ist; daher ist die Zeit t des Falles

$= 8 - \frac{x}{1075}$; folglich die Fallhöhe $h = gt^2 = 15\frac{5}{8} \times \left(8 - \frac{x}{1075}\right)^2$ und da $h = x$ ist, so giebt dies die Gleichung

$$x = 15\tfrac{5}{8} \times \left(8 - \frac{x}{1075}\right)^2,$$

woraus man $x = 818\frac{2}{3}$ Fuß erhält.

Hätte der Schall keinen Weg gemacht, so daß man ihn im Moment des Auffallens auch gehört hätte, so würde sich x aus der Gleichung $x = gt^2 = 15\frac{5}{8} \times 64$ berechnet und $= 1000$ gefunden haben.

6) Drei Körper A, B, C sind gefallen, bezüglich 4, 6, 11 Sekunden lang. Wie viele Fuße hat jeder in den letzten 3 Sekunden seines Falles beschrieben? — Antw. A $15\frac{5}{8} \times (4^2 - 1^2)$ d. h. $234\frac{3}{8}$ Fuße; B dagegen $15\frac{5}{8} \times (6^2 - 3^2)$ d. h. $390\frac{5}{8}$ Fuße; C endlich $15\frac{5}{8} \times (11^2 - 8^2)$ d. h. $890\frac{5}{8}$ Fuße.

7) Um wie viel ist bei denselben Körpern in den letzten 3 Sekunden ihres Falles die Geschwindigkeit gewachsen? — Antw. Um gleich viel, nämlich um $3 \times 2g$, oder $6g$, oder $6 \times 15\frac{5}{8}$, d. h. $93\frac{3}{8}$.

8) Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit $c = 1000$ vertikal in die Höhe geworfen. — Wie hoch (s) steigt er und wie lange (t) braucht er dazu? — Antw. Bis seine Geschwindigkeit $v, = 0$ ist; also daß s und t aus den beiden Gleichungen $v = c - 2gt$ und $s = ct - gt^2$ gefunden wird, wenn man in ihnen 0 statt v setzt; dies giebt

$$t = \frac{1000}{31\frac{1}{4}} = 32 \text{ Sek.}; \quad s = 16000 \text{ Fuß}.$$

§. 136.

1) Ein Gewicht von P Pfunden rollt eine schiefe Ebene herunter, welche mit dem Horizonte den Winkel α macht. Man soll die Bewegung näher bestimmen, einmal, wenn die Reibung nicht berücksichtigt wird, und dann auch, wenn sie berücksichtigt werden soll.

Ohne Reibung wirkt dauernd auf jeden Atom der Masse M

$=\frac{P}{2g}$ längs der schiefen Ebene die Kraft $P \cdot \sin\alpha$ und giebt daher die Beschleunigung $2G = \frac{P.\sin\alpha}{M} = P \cdot \sin\alpha : \frac{P}{2g} = 2g \cdot \sin\alpha.$ Man hat daher, wenn v die Geschwindigkeit und s den beschriebenen Raum vorstellt nach Ende der Zeit t,

$$v = 2g \cdot \sin\alpha \cdot t \quad \text{und} \quad s = g \cdot \sin\alpha \cdot t^2;$$

und es sind die Resultate dieselben, wie wenn ein einziger Atom dieselbe schiefe Ebene herunter käme.

Mit Reibung wirkt dauernd auf jeden Atom der Masse M oder $\frac{P}{2g}$, die Kraft $P \cdot \sin\alpha - \mu \cdot P \cdot \cos\alpha$ d. h. $P \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)$; daher wird die Beschleunigung

$$2G = 2g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha);$$

und dabei ist

$$v = 2Gt, \qquad s = Gt^2;$$

und alles gerade so, wie wenn ein einzelner Atom herunter rutschte und die Reibung berücksichtigt werden sollte.

2) Ein Körper vom Gewicht P Pfunde wird dieselbe schiefe Ebene hinauf geworfen, so daß er die Anfangs-Geschwindigkeit c hat. Wenn nun die Reibung berücksichtigt wird, welche Länge l wird er durchlaufen, bis er wieder zurückgeht?

Die Beschleunigung 2G ist hier $= 2g(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)$; und man hat dabei, wenn die zu Ende der Zeit t vorhandene Geschwindigkeit durch v, und der in der Zeit t beschriebene Weg durch s bezeichnet werden,

$$v = c - 2Gt \quad \text{und} \quad s = ct - Gt^2,$$

also auch

$$s = c \cdot \frac{c-v}{2G} - \frac{(c-v)^2}{4G}.$$

Die gesuchte Länge l ist aber derjenige Werth von s, für welchen $v = 0$ ist; dies giebt

$$l = \frac{c^2}{4G} = \frac{c^2}{4g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)},$$

uud auch dieses Resultat ist von der Größe des Gewichtes P unabhängig.

3) Eine Kugel von P Pfunden wird auf einer Horizontal-Ebene mit einer Anfangs-Geschwindigkeit c fortgerollt. Welche Länge L wird sie durchlaufen, wenn bloß die Reibung allein nach und nach die Geschwindigkeit vermindert und zuletzt vernichtet.

Bei dieser Aufgabe wirkt zu Ende einer jeden Zeit t die Kraft μP der Bewegung entgegen auf die Masse $M = \frac{P}{2g}$; daher ist dasmal die Beschleunigung $2G = \frac{\mu P}{M} = 2\mu g$, während $v = c - 2Gt$ und $s = ct - Gt^2$ ist. Dasmal erhält man daher

$$L = \frac{c^2}{4G} = \frac{c^2}{4\mu g}.$$

Und gerade dasselbe muß sich aus der Aufgabe Nr. 2. ergeben, wenn man daselbst $\alpha = 0$ setzt.

4) Eine Kugel von P Pfunden fällt die Höhe h frei herab; eine andere von P' Pfunden rollt auf einer schiefen Ebene, welche gegen den Horizont um den Winkel α geneigt ist, die Länge l herunter, von der Reibung aufgehalten. Jede stößt am Ende ihrer Bahn gegen einen Körper; wie verhalten sich diese Stöße gegen einander?

Ist v die End-Geschwindigkeit der ersteren Kugel, v' die der anderen, M die Masse der ersteren, M' die der anderen, so verhalten sich diese Wirkungen wie $Mv : M'v'$, also auch $= P \cdot v : P' \cdot v'$, während

$$v = 2\sqrt{gh} \quad \text{und} \quad v' = 2\sqrt{g(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)l}$$

gefunden werden. Also verhalten sich diese Wirkungen zu einander wie

$$P \cdot \sqrt{h} : P' \cdot \sqrt{l \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)}$$

5) Wie schief muß eine Ebene gegen den Horizont geneigt seyn, damit wenn eine Kugel von P' Pfunden auf ihr eine Länge l herunter rollt, durch die Reibung aufgehalten, sie gegen ein Hin-

derniß denselben Stoß ausübt, den eine andere Kugel, welche P Pfunde wiegt auf ein ähnliches Hinderniß ausüben würde, wenn solche eine gegebene Höhe h frei herunter fiele? —

Das mechanische Moment der letzteren Kugel ist $P \times 2\sqrt{gh}$; das der ersteren dagegen, wenn α der gesuchte Winkel ist, wird $= P' \times 2\sqrt{gl(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)}$ gefunden. Da nun beide mechanischen Momente (d. h. beide „Größen der Bewegung" oder „Größen der Stöße") einander gleich sein sollen, so erhält man die Gleichung

$$2P \cdot \sqrt{gh} = 2P' \cdot \sqrt{gl \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)},$$

woraus

$$P^2 h = P'^2 \cdot l \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha),$$

oder

$$\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha = \frac{P^2}{P'^2} \cdot \frac{h}{l}$$

hervorgeht. — Sucht man zuerst einen Winkel φ aus der Gleichung

$$tg\,\varphi = \mu,$$

so findet sich nachher hieraus

$$\sin(\alpha - \varphi) = \frac{P^2 h \cdot \cos\varphi}{P'^2 \cdot l}.$$

§. 137.

Die Attwood'sche Fallmaschine.

Denken wir uns die in der Fig. 70. sichtbar gemachte Vorrichtung, wo ein Faden über eine Rolle geht, während auf der einen Seite ein Gewicht P', auf der anderen Seite des Fadens aber ein Gewicht P ($>$P') hängt, welche Gewichte bezüglich die Massen m' und m haben mögen, so daß man $m' = \frac{P'}{2g}$ und $m = \frac{P}{2g}$ hat. Das Gewicht P sinkt nun, das andere P' steigt. Man soll das Gesetz dieser Bewegung näher ausmitteln, unter der Voraussetzung, daß die Rolle den Radius R hat, und an ihrem Bolzen, der den Radius ϱ haben mag, sich reibt, daß endlich die Masse M der Rolle berücksichtigt werden soll, nicht aber ihr Gewicht Π ($= 2gM$).

Nach dem d'Alembert'schen Princip sind zu Ende der Zeit t die verlorenen Kräfte der ersteren Art, in die Stoß-Einheit ausgedrückt, bezüglich P·dt und P'·dt, oder 2gm·dt und 2gm'·dt beide vertikal nach unten gerechnet. Ist nun ε der in der unendlich kleinen Zeit dt, die unmittelbar nach der Zeit t folgt, gewonnene (und in diesem Problem gesuchte) Zuwachs an Winkel-Geschwindigkeit, so erleiden die Massen m und m' einen Zuwachs an den Größen der Bewegung, welcher bezüglich m·Rε und m'·Rε ist, ersterer nach unten, letzterer nach oben. Zu den verlorenen Kräften der zweiten Art gehören also m·Rε vertikal nach oben, und m'Rε vertikal nach unten. — Endlich gewinnt ein Molekül der Rolle, dessen Masse dM ist und welches von der Dreh-Axe um r entfernt ist, den Zuwachs an Größe der Bewegung = rε×dM; deshalb gehört zu den verlorenen Kräften der zweiten Art noch diese Kraft rε×dM, senkrecht auf r und der Drehung entgegen, endlich selbige für jedes einzelne Molekül der Rolle genommen. Alle diese bis jetzt aufgezählten verlorenen Kräfte 2gm·dt, 2gm'·dt, m·Rε, m'·Rε, und die unendlich vielen rε×dM, halten sich nun nach dem d'Alembert'schen Princip im Gleichgewicht mittelst des unbeweglichen Bolzens der Rolle, seines Gegendrucks N·dt gegen die Rolle, und der Reibung μN·dt *). Schreiben wir daher die Bedingungs-Gleichungen des Gleichgewichts hin, so erhalten wir drei Gleichungen, aus denen die Größe und die Richtung des augenblicklichen Druckes, und noch der Zuwachs ε an Winkel-Geschwindigkeit gefunden werden kann.

Denkt man sich zu dem Ende drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ, die erstere horizontal, die andere vertikal nach unten, beide in der Ebene des Fadens, und OZ mit der horizontalen Dreh-Axe zusammenfallend, und nennt man φ den Winkel, den die Richtung des Gegendrucks N des Bolzens gegen die Rolle, mit OX macht, von OX nach OY bis zu 360° gezählt; ist eben

---

*) Zu den verlorenen Kräften der ersten Art gehört auch das Gewicht Π der Rolle, welches Druck N und Reibung μN etwas ändert, aber hier nicht in Rechnung gebracht werden soll.

eben so ψ der Winkel, den r mit OX macht, so machen die Kräfte

$$2gm\cdot dt,\ 2gm'\cdot dt,\ R\varepsilon\cdot m,\ R\varepsilon\cdot m',\ r\varepsilon\times dM,\ N\cdot dt,\ \mu N\cdot dt$$

mit OX bezüglich die Winkel

$$90^0,\ 90^0,\ 270^0,\ 90^0,\ 270^0+\psi,\ \varphi,\ 270^0+\varphi,$$

und man hat daher die drei Gleichungen des Gleichgewichts

$$2gm\cdot dt\cdot cos\,90^0+2gm'\cdot dt\cdot cos\,90^0+R\varepsilon m\cdot cos\,270^0+R\varepsilon m'\cdot cos\,90^0 \\ +\Sigma[r\varepsilon\cdot dM\cdot cos(270^0+\psi)]+N\cdot dt\cdot cos\,\varphi+\mu N\cdot dt\cdot cos(270^0+\varphi)=0;$$

$$2gm\cdot dt\cdot sin\,90^0+2gm'\cdot dt\cdot sin\,90^0+R\varepsilon m\cdot sin\,270^0+R\varepsilon m'\cdot sin\,90^0 \\ +\Sigma[r\varepsilon\cdot dM\cdot sin(270^0+\psi)]+N\cdot dt\cdot sin\,\varphi+\mu N\cdot dt\cdot sin(270^0+\varphi)=0;$$

und die Momenten-Gleichung

$$2gm\cdot dt\cdot R-2gm'\cdot dt\cdot R-mR^2\cdot\varepsilon-m'R^2\cdot\varepsilon-\Sigma(r^2\cdot\varepsilon\cdot dM)-\mu N\cdot\varrho=0.$$

Sind nun x, y, z die Koordinaten-Werthe des Moleküls dM, so ist $r\cdot cos\,\psi=x$, und $r\cdot sin\,\psi=y$; und die vorstehenden drei Gleichungen formen sich, wenn man auch durch dt dividirt und $\frac{\varepsilon}{dt}=2G$ setzt, so:

1) $2G\cdot\Sigma(y\cdot dM)+N\cdot cos\,\varphi+\mu N\cdot sin\,\varphi=0;$

2) $2g(m+m')-2G\cdot(m-m')\cdot R-2G\cdot\Sigma(x\cdot dM)+N\cdot sin\,\varphi-\mu N\cdot cos\,\varphi=0;$

3) $2g(m-m')R-2G\cdot(m+m')\cdot R^2-2G\cdot\Sigma(r^2\cdot dM)-\mu N\cdot\varrho=0.$

Sind nun x_0 und y_0 die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punkts der Rolle, so hat man nach §. §. 11. 12.

$$\Sigma(y\cdot dM)=M\cdot y_0 \quad\text{und}\quad \Sigma(x\cdot dM)=M\cdot x_0,$$

während hier x_0 und y_0 der Null gleich sind, weil der Schwer-Punkt in O selbst liegt. Also hat man hier

4) $\Sigma(y\cdot dM)=0$ und 5) $\Sigma(x\cdot dM)=0.$

Die Gleichung 1. giebt nun sogleich

$$cotg\,\varphi=-\mu;\quad sin\,\varphi=\frac{-1}{\sqrt{1+\mu^2}};\quad cos\,\varphi=\frac{+\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Die Gleichung 2. giebt dann

$$(☾)\cdots\quad N=\frac{2g(m+m')-2G(m-m')R}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Wird daher dieser Werth in die 3. substituirt, und $\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}=\nu$

gesetzt, so erhält man

$$2g(m-m')R-2G[(m+m')R^2+\Sigma(r^2dM)]-\nu\varrho[2g(m+m')-2G(m-m')R] = 0,$$

woraus

$$6)\quad G = \frac{(m-m')R-\nu\varrho(m+m')}{(m+m')R^2+\Sigma(r^2\cdot dM)-\nu\varrho\cdot(m-m')R}\cdot g$$

hervorgeht.

Da nun $\varepsilon = 2G\cdot dt$ der Zuwachs an Winkel-Geschwindigkeit der Rolle und dieser, wie so eben gefunden wurde, konstant ist, so ist die Drehung eine gleichförmig beschleunigte, und $2G$ das, was man die Beschleunigung nennt, so daß, wenn w der Winkel-Weg, und u die Winkel-Geschwindigkeit der Drehung ist, man (nach §. 57.)

$$7)\ u = 2G\cdot t \qquad \text{und} \qquad 8)\ w = Gt^2$$

hat. Sind dann s und v bezüglich der Weg und die Geschwindigkeit der Punkte im Rande der Rolle, also des Fadens, mithin der Gewichte P und P', so hat man noch

$$9)\ v = 2GR\cdot t \qquad \text{und} \qquad 10)\ s = GR\cdot t^2;$$

und so ist das Problem vollständig gelöst, sobald nur in dem Ausdruck für G in 6. statt der Massen die man nicht kennt, Gewichte vorkommen. Zu dem Ende muß man das Trägheits-Moment $\Sigma(r^2\cdot dM)$ der Rolle berechnen. Da nun M die Masse der Rolle mit dem Bolzenloch ist, so ist $\frac{M\varrho^2}{R^2-\varrho^2}$ die Masse, derselben Art womit dieses Bolzenloch ausgefüllt werden könnte, und $\frac{MR^2}{R^2-\varrho^2}$ die Masse der vollen Rolle. Daraus folgt das Trägheits-Moment der vollen Rolle (§. 80.)

$$= \tfrac{1}{2}\frac{MR^4}{R^2-\varrho^2},$$

so wie das Trägheits-Moment der Ausfüllung

$$= \tfrac{1}{2}\frac{M\varrho^4}{R^2-\varrho^2};$$

folglich ist das Trägheits-Moment $\Sigma(r^2\cdot dM)$ der Rolle mit dem

Bolzenloch

$$= \tfrac{1}{2}M \cdot \frac{R^4 - \varrho^4}{R^2 - \varrho^2} = \tfrac{1}{2}M(R^2 + \varrho^2)\ ^*).$$

Substituirt man diesen Werth statt $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ in 6., so kann man Zähler und Nenner mit 2g multipliciren, und man bekommt sogleich statt der Massen ihre Gewichte, nämlich

$$11)\quad G = \frac{(P-P')R - \nu\varrho(P+P')}{(P+P')R^2 + \frac{1}{2}\Pi(R^2+\varrho^2) - \nu\varrho(P-P')R} \cdot g.$$

Anmerkung. Läßt man die Reibung außer Acht, so wird

$$G = \frac{(P-P')R}{(P+P')R^2 + \frac{1}{2}\Pi \cdot (R^2+\varrho^2)} \cdot g;$$

und läßt man auch noch die Masse der Rolle außer Acht, so erhält man noch einfacher

$$G = \frac{1}{R} \cdot \frac{P-P'}{P+P'} \cdot g, \quad \text{oder} \quad RG = \frac{P-P'}{P+P'} \cdot g,$$

während RG die Beschleunigung des Fadens, also der Gewichte P (nach unten) und P′ (nach oben) vorstellt. — Dies ist das Resultat, welches man gewöhnlich für die Atwood'sche Fallmaschine angegeben findet, weil man gewöhnlich die Reibung der Rolle und die Masse der Rolle außer Acht läßt.

Nimmt man zu irgend einer Zeit dem Gewicht P etwas ab (was zu dem Behufe als Barre bloß lose aufsitzt und von einem Ringe aufgehalten wird, durch welchen das übrige Gewicht durchgeht), so daß $P = P'$ wird, so geht die Beschleunigung G aus 11. von dem Augenblick an über in

$$G = \frac{-2\nu\varrho P'}{2P'R^2 + \frac{1}{2}\Pi(R^2+\varrho^2)} \cdot g;$$

und es ist daher die Bewegung von jetzt ab verzögert, und nur dann konstant, wenn $\nu\varrho = 0$ gesetzt werden kann, also wenn keine Reibung ist. Sind ν und ϱ sehr klein, so ist die Bewegung von diesem Augenblick ab, wenigstens sehr nahe konstant.

---

*) Die Berechnung von $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ wird natürlich etwas anders, wenn man sich den Bolzen in der Rolle fest und auf beiden Seiten der Rolle mit Zapfen in Zapfenlagern gehend denkt.

Hätte man auch noch das Gewicht Π der Rolle als eine Kraft in Rechnung gebracht, welche eben so wie P und P′ zu Ende jeder Zeit t auf's neue hinzutritt, so würde bloß die Gleichung 2. noch das Glied $+\Pi$ oder $+2gM$ mehr erhalten haben, weil solches vertikal, also in der Richtung OY wirkt, übrigens aber durch O geht, so daß dessen statisches Moment in die Gleichung 3. nicht eingehen kann. Dann würde der Ausdruck für N (in ☾.) noch im Zähler das Glied $+\Pi$ oder $+2gM$ mehr erhalten, und dies würde die Gleichung 6. dahin umgeändert haben, daß statt $\nu\varrho(m+m')$ jetzt $\nu\varrho(m+m'+M)$ zu stehen gekommen wäre. Die Gleichung 11. wäre dann geworden

$$G = \frac{(P-P')R - \nu\varrho(P+P'+\Pi)}{(P+P')R^2 + \frac{1}{2}\Pi(R^2+\varrho^2) - \nu\varrho(P-P')R} \cdot g.$$

§. 138.

Denken wir uns nun einen beliebigen Körper, dessen Masse M seyn mag, so gestellt, daß er sich um zwei feste, unbewegliche Punkte A und A′, also um die Axe AA′ drehen kann, ohne Reibung; und legen wir drei Koordinaten-Axen OX, OY, OZ so, daß OZ mit AA′ zusammenfällt, die Ebene XOY auf OZ oder AA′ senkrecht steht, und OX und OY selbst wieder auf einander senkrecht stehen. Die Ordinaten-Werthe von A und A′ in OZ seyen bezüglich a und a′.

Auf diesen Körper wirke nun parallel mit der Ebene XOY, und mit OX und OY die Winkel α und β machend, endlich an einer Stelle, deren Koordinaten-Werthe $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ sind, ein Stoß P augenblicklich, — so wird solcher dem Körper eine drehende Bewegung ertheilen, welche wir von OY nach OX hin uns denken wollen, und deren Winkel-Geschwindigkeit im ersten Augenblick ω seyn mag. — Man soll diese (Anfangs-) Winkel-Geschwindigkeit ω, so wie die Stöße bestimmen, welche die festen Punkte A und A′ im ersten Moment auszuhalten haben.

Man muß, wie immer, das d'Alembert'sche Princip anwenden. — Hier sind aber die verlorenen Kräfte der ersten Art $P \cdot \cos\alpha$ parallel mit OX und $P \cdot \cos\beta$ parallel mit OY *); die

*) Es wirkt eigentlich in demselben Augenblick auch noch das Gewicht des Körpers in seinem Schwer-Punkt; da aber solches als Druck unendlich klein ist gegen jeden Stoß, so kann solches hier, wo der erste Augenblick nur betrachtet wird, nicht in Rechnung kommen.

verlorenen Kräfte der zweiten Art dagegen sind $r\omega \cdot dM$, wenn dM die Masse eines jeden Moleküls und r die Entfernung desselben von der Dreh-Axe OZ bedeutet. Diese verlorenen Kräfte $r\omega \cdot dM$ stehen senkrecht auf r und wirken der Drehung entgegen; — sind daher x, y, z die Koordinaten-Werthe des Moleküls dM, so zerlegt sich jede solche verlorene Kraft $r\omega \cdot dM$ in die zwei Seiten-Kräfte $-\omega \cdot y \cdot dM$ parallel mit OX, und $+\omega \cdot x \cdot dM$ parallel mit OY. Nennen wir X, Y die Gegen-Stöße des Punktes A gegen den Körper, die parallel mit den Axen OX und OY laufen, so wie X′ und Y′ die analogen für den Punkt A′, so halten sich alle Kräfte

$P \cdot \cos\alpha$, X, X′, $-\omega \cdot y \cdot dM$ parallel mit OX,
und $P \cdot \cos\beta$, Y, Y′, $+\omega \cdot x \cdot dM$ parallel mit OY

im Gleichgewicht, und dies giebt nach §. 48. sechs Bedingungs-Gleichungen, von denen die dritte identisch $0 = 0$ wird *), die übrigen aber X, Y, X′, Y′ und ω finden lassen. Diese übrigen Gleichungen sind, wenn $p (= \mathfrak{y} \cdot \cos\alpha - \mathfrak{x} \cdot \cos\beta)$ den kürzesten Abstand der Richtung von P von der Dreh-Axe vorstellt,

1) $$P \cdot \cos\alpha + X + X' - \omega \cdot \Sigma(y \cdot dM) = 0;$$
2) $$P \cdot \cos\beta + Y + Y' + \omega \cdot \Sigma(x \cdot dM) = 0;$$
3) $$P \cdot p - \omega \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) = 0;$$
4) $$P \cdot \mathfrak{z} \cdot \cos\alpha - \omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM) + aX + a'X' = 0;$$
5) $$P \cdot \mathfrak{z} \cdot \cos\beta + \omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM) + aY + a'Y' = 0;$$

wo die Summen $\Sigma(yz \cdot dM)$ und $\Sigma(xz \cdot dM)$ eben so wie das Trägheits-Moment $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ durch dreifache Integration gefunden werden müssen.

Von diesen Gleichungen giebt die mittlere sogleich

6) $$\omega = \frac{P \cdot p}{\Sigma(r^2 \cdot dM)},$$

---

*) Eigentlich muß man noch die Stöße Z und Z′ bei A und A′ in der Richtung OZ in Rechnung bringen, und diese dritte Gleichung wird dann $Z + Z' = 0$, welches zu $Z = 0$ und $Z' = 0$ führt, da bei unserer Aufgabe kein Grund vorhanden ist, weswegen diese Stöße in entgegengesetzter Richtung statt finden sollten. Wir haben oben im Texte diese Stöße Z und Z′ sogleich als Null vorausgesetzt, und deshalb ist diese dritte Gleichung eine identische geworden.

wo $\Sigma(r^2 \cdot dM)$ das (nach den §. §. 78 — 80. zu berechnende) Trägheits-Moment des Körpers vorstellt. Die übrigen 4 Gleichungen geben dann, wenn man statt ω diesen Werth setzt, die Stöße gegen die Axe OZ in A und A′ ohne Weiteres, wobei man jedoch nicht übersehen mag, daß nach den §. §. 11. 12.

7) $$\Sigma(x \cdot dM) = M \cdot x_0,$$

8) $$\Sigma(y \cdot dM) = M \cdot y_0$$

ist, wenn x_0, y_0 und z_0 die Koordinaten-Werthe des Schwer-Punktes des Körpers vorstellen *).

§. 139.

Man kann sich bei derselben Aufgabe noch fragen: wie muß der Stoß P erfolgen, damit die Stöße X, X′, Y und Y′ alle der Null gleich werden, d. h. damit die Axe AA′ gar keinen Stoß erleide.

Um diese Frage zu beantworten, darf man nur in den Gleichungen §. 138. Nrr. 1. 2. 4. und 5. statt X, X′, Y, Y′ überall die Null setzen, statt ω aber den aus der 3. gezogenen Werth. Man erhält dann mit Zuziehung der Gleichungen 7. und 8. folgende Bedingungs-Gleichungen:

1) $$\cos\alpha \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) - p \cdot M \cdot y_0 = 0;$$

2) $$\cos\beta \cdot \Sigma(r^2 \cdot dM) + p \cdot M \cdot x_0 = 0;$$

3) $$P \cdot \mathfrak{z} \cdot \cos\alpha - \omega \cdot \Sigma(yz \cdot dM) = 0;$$

4) $$P \cdot \mathfrak{z} \cdot \cos\beta + \omega \cdot \Sigma(xz \cdot dM) = 0.$$

Aus den Gleichungen 1. und 2. erhält man noch durch Elimination von $\Sigma(r^2 \cdot dM)$,

5) $$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \frac{y_0}{x_0} = 0;$$

und diese Gleichung drückt die Bedingung aus, daß der Stoß P senkrecht gegen die Ebene gerichtet ist, welche die Dreh-Axe AA′ oder OZ mit dem Schwer-Punkt des Körpers verbindet. Hat also der Stoß P diese Richtung und ist er dabei von der Dreh-

*) Diese Aufgabe ist bereits im §. 75. (hier aber mit größerer Vollständigkeit) behandelt.

Axe OZ um den Werth von p entfernt, der sich aus einer der beiden Gleichungen 1. oder 2. berechnet, und sind die Koordinaten-Axen OX, OY und OZ so gewählt, daß $\Sigma(yz \cdot dM) = 0$ und $\Sigma(xz \cdot dM) = 0$ wird, so darf man nur $z = 0$ setzen, d. h. den Stoß in die Ebene XOY dieser Axen verlegen und es erleidet die Dreh-Axe im ersten Augenblick gar keinen Stoß und die Drehung des Körpers beginnt mit der gefundenen Winkel-Geschwindigkeit ω um dieselbe Axe AA' oder OZ, auch wenn A und A' nicht unbeweglich sind.

Anmerkung. Man kann sich die Frage stellen, ob für jeden beliebigen Körper drei auf einander senkrechte Axen existiren, für welche, wenn sie zu Koordinaten-Axen genommen werden, $\Sigma(xy \cdot dM) = 0$, $\Sigma(xz \cdot dM) = 0$ und $\Sigma(yz \cdot dM) = 0$ wird. — Man findet aber, daß für jeden beliebigen Punkt O drei solche durch ihn hindurchgehende Axen existiren, welche dann die (zu dem Punkt O gehörigen) Haupt-Axen des Körpers genannt werden, während O in dem Körper oder außerhalb des Körpers beliebig gewählt werden kann. — Wegen der Theorie der Haupt-Axen selbst lese man das „Lehrbuch der Mechanik" Th. III. Kap. IV.

§. 140.

Hat man aber das Problem des §. 138. gelöst, und gesehen, was im ersten Augenblick des Stoßes sich ereignet, so kann man jetzt auch nach der Bewegung desselben Körpers in allen den folgenden Augenblicken, also zu Ende jeder beliebigen Zeit t fragen.

Es könnte scheinen, als dürfe man, um diese Frage zu beantworten, nur in den vorstehenden Formeln statt ω jetzt den Zuwachs an Winkel-Geschwindigkeit setzen, so wie statt des Stoßes P das Gewicht Π des Körpers, um die Gleichungen für die jetzige Aufgabe zu haben. Es liegt aber in dieser Annahme der Fehler, daß man dann den Zuwachs an Winkel-Geschwindigkeit in derselben Richtung voraussetzt, welche die Winkel-Geschwindigkeit im Augenblick vorher, nämlich zu Ende der Zeit t selbst hatte; außerdem liegt in den Gleichungen noch die Unbe-

quemlichkeit, daß die Koordinaten-Werthe sowohl des Angriffs-Punktes der Kraft (d. h. des Schwer-Punktes) als auch die des Moleküls in jedem Augenblick andere werden, d. h. daß $\Sigma(xz \cdot dM)$ und $\Sigma(yz \cdot dM)$ selber Funktionen der Zeit sind. — Um den erstgenannten Fehler zu vermeiden, wird man also lieber Seiten-Geschwindigkeiten und Zuwachse der Seiten-Geschwindigkeiten einführen, deren Richtungen fest stehen, so daß man hinsichtlich derselben nie im Zweifel seyn kann. Um aber den letztgedachten Uebelstand zu heben, muß man sich noch zwei Axen OX′ und OY′ (Fig. 71.) denken, welche im Körper fest, also im Raume beweglich sind, und anfänglich wo $t = 0$ ist, bezüglich mit den horizontalen und vertikalen Axen OX und OY zusammenfallen können, zu Ende der Zeit t aber um den Winkel $X'OX = \theta$ von letzteren abstehen; dann ist θ der Winkel-Weg, $\partial\theta_t$ die Winkel-Geschwindigkeit und $\partial^2\theta_t \cdot dt$ der Zuwachs an Winkel-Geschwindigkeit der Drehung. Sind nun S_1 und m die Projektionen des Schwer-Punktes und des Moleküls auf die Ebene XOY, und sind x'_0, y'_0, so wie x', y' die Koordinaten-Werthe von S_1 und von m auf diese neuen, im Körper festen Axen OX′ und OY′ bezogen, — so hat man die Gleichungen

1) $x = x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \sin\theta;\quad y = x' \cdot \sin\theta + y' \cdot \cos\theta;$
und

2) $x_0 = x'_0 \cdot \cos\theta - y'_0 \cdot \sin\theta;\quad y_0 = x'_0 \cdot \sin\theta + y'_0 \cdot \cos\theta.$
Dadurch erhält man

$$3)\quad \Sigma(x \cdot dM) = \cos\theta \cdot \Sigma(x' \cdot dM) - \sin\theta \cdot \Sigma(y' \cdot dM) = M \cdot x'_0 \cdot \cos\theta - M \cdot y'_0 \cdot \sin\theta;$$

$$4)\quad \Sigma(y \cdot dM) = \sin\theta \cdot \Sigma(x' \cdot dM) + \cos\theta \cdot \Sigma(y' \cdot dM) = M \cdot x'_0 \cdot \sin\theta + M \cdot y'_0 \cdot \cos\theta;$$

$$5)\quad \Sigma(xz \cdot dM) = \cos\theta \cdot \Sigma(x'z' \cdot dM) - \sin\theta \cdot \Sigma(y'z' \cdot dM);$$

$$6)\quad \Sigma(yz \cdot dM) = \sin\theta \cdot \Sigma(x'z' \cdot dM) + \cos\theta \cdot \Sigma(y'z' \cdot dM),$$

während jedoch $z' = z$ ist, weil die Axe OZ für beide Koordinaten-Axen-Systeme dieselbe geblieben ist.

Da sich nun $\Sigma(x'z' \cdot dM)$ und $\Sigma(y'z' \cdot dM)$ auf die im Körper festen Axen beziehen, so lassen sie sich, als von der Zeit unabhängig, genau so wie die Trägheits-Momente durch drei-

fache Integration berechnen. Also sind dann auch die Summen $\Sigma(xz \cdot dM)$, $\Sigma(yz \cdot dM)$ in $\cos\theta$ und $\sin\theta$ ausgedrückt, berechnet.

Es sind nun ∂x_t, ∂y_t die Seiten-Geschwindigkeiten, also $\partial^2 x_t \cdot dt$ und $\partial^2 y_t \cdot dt$ die Zuwachse dieser Seiten-Geschwindigkeiten, demnach $dM \cdot \partial^2 x_t$, $dM \cdot \partial^2 y_t$ die Zuwachse der Gröfsen der Bewegung des Moleküls dM parallel mit den Axen OX und OY und bereits in die Druck-Einheit ausgedrückt, weshalb der Faktor dt wegfällt; also halten sich dasmal, wenn man OZ und OX horizontal, OY dagegen vertikal (nach unten) nimmt, die Kräfte

$$X,\ X',\ -dM \cdot \partial^2 x_t \quad \text{parallel mit } OX,$$

und $$\Pi,\ Y,\ Y',\ -dM \cdot \partial^2 y_t \quad \text{parallel mit } OY$$

vermöge des d'Alembert'schen Princips im Gleichgewicht. Dies giebt die 5 Gleichungen:

7) $$X + X' - \Sigma(\partial^2 x_t \cdot dM) = 0;$$

8) $$\Pi + Y + Y' - \Sigma(\partial^2 y_t \cdot dM) = 0;$$

9) $$\Pi \cdot x_0 + \Sigma(y \cdot \partial^2 x_t - x \cdot \partial^2 y_t) \cdot dM = 0;$$

10) $$aX + a'X' - \Sigma(z \cdot \partial^2 x_t \cdot dM) = 0;$$

11) $$\Pi \cdot z_0 + aY + a'Y' - \Sigma(z \cdot \partial^2 y_t \cdot dM) = 0.$$

Nun mufs man alles in θ ausdrücken, wozu die Gleichungen 1. dienen. Sie geben sogleich

$$\partial x_t = -(x' \cdot \sin\theta + y' \cdot \cos\theta) \cdot \partial\theta_t = -y \cdot \partial\theta_t;$$

$$\partial y_t = \ (x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \sin\theta) \cdot \partial\theta_t = +x \cdot \partial\theta_t;$$

$$\partial^2 x_t = -y \cdot \partial^2\theta_t - x \cdot \partial\theta_t^{\,2}; \qquad \partial^2 y_t = x \cdot \partial^2\theta_t - y \cdot \partial\theta_t^{\,2}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen 7—11., so erhält man

12) $$X + X' + \partial^2\theta_t \cdot \Sigma(y \cdot dM) + \partial\theta_t^{\,2} \cdot \Sigma(x \cdot dM) = 0;$$

13) $$\Pi + Y + Y' - \partial^2\theta_t \cdot \Sigma(x \cdot dM) + \partial\theta_t^{\,2} \Sigma(y \cdot dM) = 0;$$

14) $$\Pi \cdot x_0 - \partial^2\theta_t \cdot \Sigma r^2 \cdot dM = 0;$$

15) $$aX + a'X' + \partial^2\theta_t \cdot \Sigma(yz \cdot dM) + \partial\theta_t^{\,2} \cdot \Sigma(xz \cdot dM) = 0;$$

16) $$\Pi \cdot z_0 + aY + a'Y' - \partial^2\theta_t \cdot \Sigma(xz \cdot dM) + \partial\theta_t^{\,2} \cdot \Sigma(yz \cdot dM) = 0,$$

wo statt x_0 noch $r_0 \cdot \cos(\theta + \theta')$ gesetzt werden mufs, wenn

r_0 den Abstand des Schwer-Punkts von der Dreh-Axe und θ' den konstanten Winkel mOS_1 vorstellt.

Die Gleichung 14. läſst sich dann integriren, wie die Gleichung des Pendels §. 74., denn die hiesige Aufgabe behandelt eben jenen Pendel wieder, nur daſs hier, wenn θ gefunden ist, die 4 übrigen Gleichungen noch die Drucke liefern, welche in jedem Augenblick die beiden Punkte A und A', um welche die Schwingung statt findet, auszuhalten haben.

Dächte man sich den Körper ohne Gewicht, oder brächte man doch das Gewicht nicht in Rechnung, so würde die Gleichung 14.) $\partial^2\theta_t = 0$, also die Winkel-Geschwindigkeit $\partial\theta_t$ konstant und der Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit ω gleich geben, und es wäre dann $\theta = \omega t$, wenn man t mit θ zugleich anfangen läſst. Die Gleichungen 12., 13., 15. und 16. würden dann, wenn man diese Werthe (und die aus 3.—6.) substituirt, folgende werden, nämlich:

17) $$X + X' + M\cdot\omega^2\cdot(x'_0\cdot\cos\omega t - y'_0\cdot\sin\omega t) = 0;$$

18) $$Y + Y' + M\cdot\omega^2\cdot(x'_0\cdot\sin\omega t + y'_0\cdot\cos\omega t) = 0;$$

19) $$aX + a'X' + \omega^2\cdot[\sin\omega t\cdot\Sigma(x'z'\cdot dM) + \cos\omega t\cdot\Sigma(y'z'dM)] = 0;$$

20) $$aY + a'Y' + \omega^2\cdot[\cos\omega t\cdot\Sigma(x'z'\cdot dM) - \sin\omega t\cdot\Sigma(y'z'dM)] = 0;$$

und diese Gleichungen geben nun die Drucke X, X', Y, Y' ohne Weiteres *).

Setzt man in diesen 4 Gleichungen $X = X' = Y = Y' = 0$, so werden sie die Bedingungs-Gleichungen, welche erfüllt seyn müssen, wenn die konstante Bewegung um AA' gerade dieselbe bleiben soll, auch wenn A und A' nicht mehr unbeweglich gedacht werden. Diese Bedingungs-Gleichungen geben aber

$$x'_0 = 0 \quad \text{und} \quad y'_0 = 0,$$

desgleichen

$$\Sigma(x'z'\cdot dM) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(y'z'\cdot dM) = 0;$$

---

*) Diese Drucke sind offenbar nichts anderes als die Resultanten aller Centrifugal-Kräfte aller Moleküle in demselben Augenblick.

d. h. dies kann nur statt finden, wenn die Dreh-Axe OZ oder AA' eine Haupt-Axe des Körpers ist, die durch den Schwer-Punkt geht.

§. 141.

An einer vertikal stehenden Stange hängt von der Spitze ein Faden mit einem Gewicht von Q Pfunden herunter. Die Länge dieses Fadens bis zum Schwer-Punkt des Gewichts ist $= \mathrm{a}$. Die Stange wird nun sammt dem Faden und dem Gewicht Q um die vertikale Axe derselben mit einer konstanten Geschwindigkeit gedreht, so daß sie in der Sekunde n Umdrehungen macht. Vermöge der Centrifugal-Kräfte wird sich das Gewicht Q von der Stange entfernen, so daß der vollkommen biegsam und gewichtlos gedachte Faden mehr oder weniger schief zu liegen kommt (gegen die Stange) und mit der vertikalen Stange den Winkel α macht. Man soll diesen Winkel α finden.

Der Radius des Kreises, in welchem sich der Schwer-Punkt des Gewichts Q dreht und welcher auf der Axe der Stange senkrecht steht, ist $= \mathrm{a} \cdot sin\, \alpha$; folglich ist der von dem Schwer-Punkt des Gewichts in der Sekunde beschriebene Weg $= \mathrm{n} \times 2\pi \mathrm{a} \cdot sin\, \alpha$; also ist die Geschwindigkeit der Umdrehung des Schwer-Punkts $= 2\mathrm{n}\pi\mathrm{a} \cdot sin\, \alpha$ und daher die Centrifugal-Kraft desselben (gegen die Schwere 2g)

$$= \frac{4\mathrm{n}^2\pi^2\mathrm{a}^2 \cdot sin\, \alpha^2}{\mathrm{a}} = 4\mathrm{n}^2\pi^2\mathrm{a} \cdot sin\, \alpha^2;$$

mithin ist die Centrifugal-Kraft der ganzen Masse M des Gewichts Q, $= \mathrm{M} \times 4\mathrm{n}^2\pi^2\mathrm{a} \cdot sin\, \alpha^2$, während $\mathrm{Q} = \mathrm{M} \times 2\mathrm{g}$ ist. — Man hat nun drei Kräfte im Gleichgewicht am Schwer-Punkt von Q; nämlich das Gewicht 2gM vertikal nach unten, die Centrifugal-Kraft $4\mathrm{Mn}^2\pi^2\mathrm{a} \cdot sin\, \alpha^2$ horizontal und die Spannung S des Fadens. Da verhalten sich die Kräfte wie die Sinus der Winkel, die von den beiden anderen Kräften gebildet werden (§. 6.); und man hat daher

$$2\mathrm{gM} : 4\mathrm{Mn}^2\pi^2\mathrm{a} \cdot sin\, \alpha^2 = sin(90 + \alpha) : sin(180^0 - \alpha)$$

oder

$$\mathrm{g} : 2\mathrm{n}^2\pi^2\mathrm{a} \cdot sin\, \alpha^2 = cos\, \alpha : sin\, \alpha;$$

und dies giebt

$$sin 2\alpha = \frac{g}{\pi^2 n^2 \alpha},$$

wo $g = 15\frac{5}{8}$ ist, so wie $\pi = 3\frac{1}{7}$.

Ist n sehr groß, so kann $sin 2\alpha$ nahehin $= 0$, also 2α nahehin $= 180^0$, also α nahehin $= 90^0$ werden, d. h. der Faden kann nahehin horizontal sich legen.

§. 142.

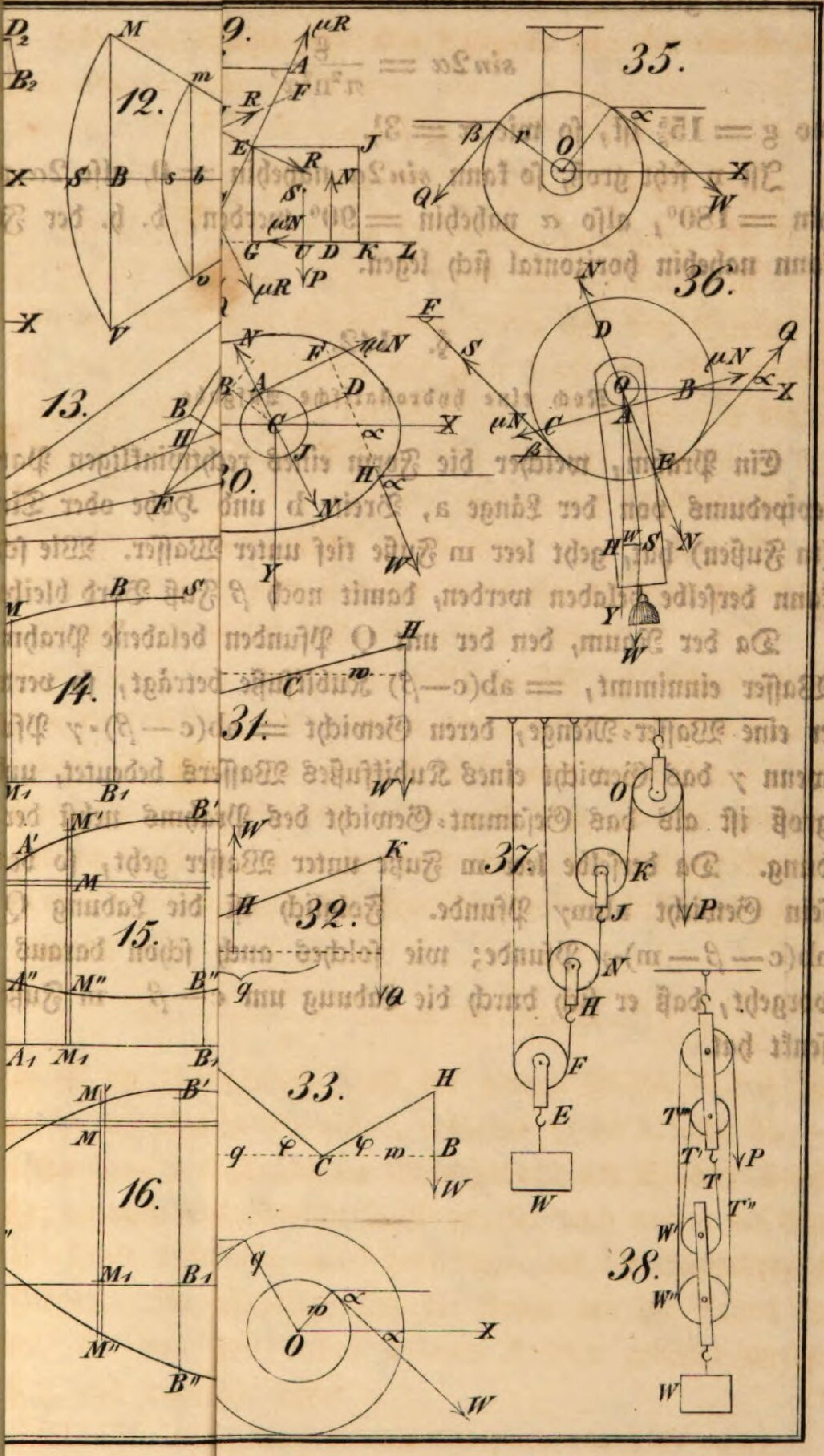
Noch eine hydrostatische Aufgabe.

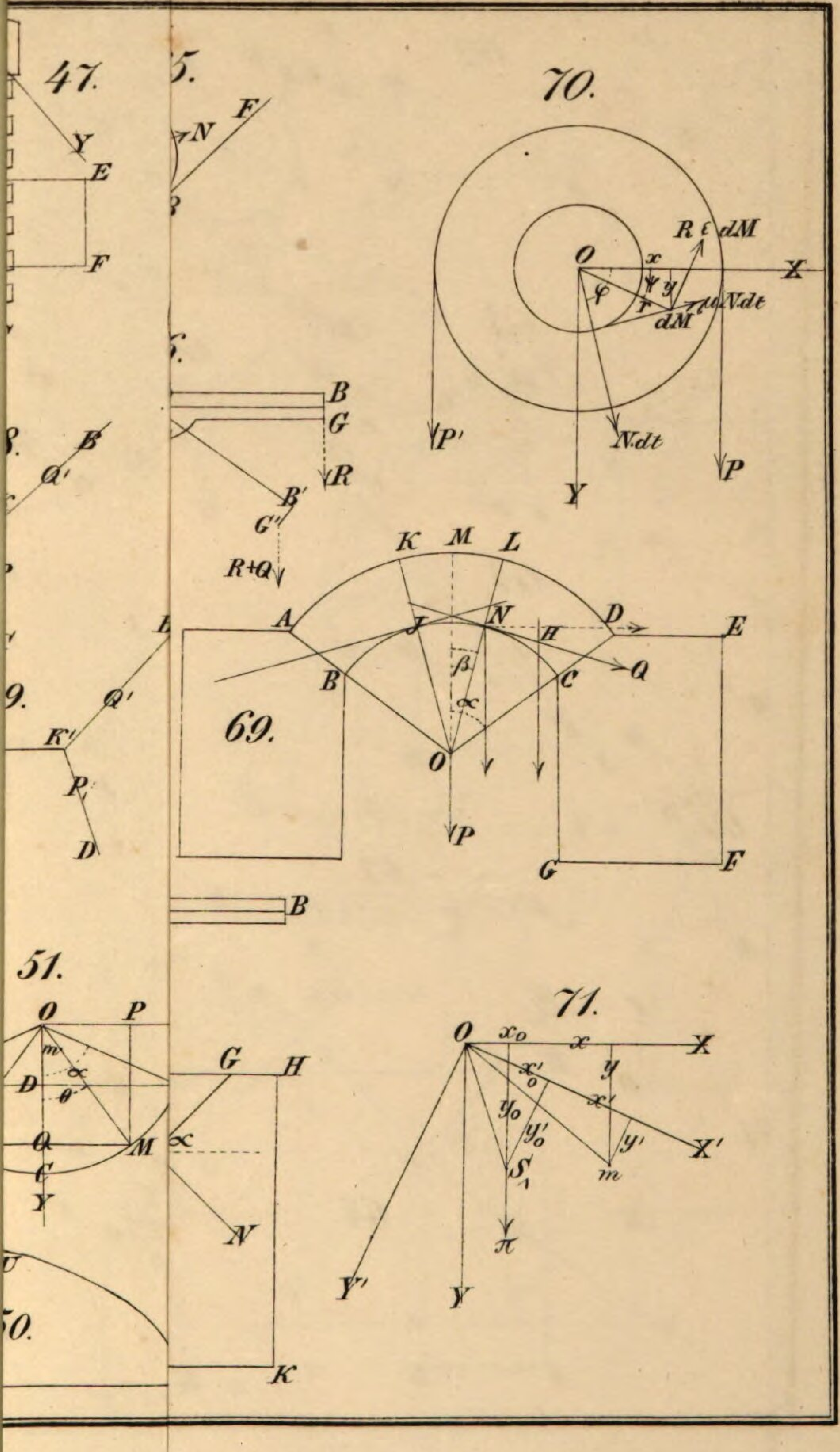
Ein Prahm, welcher die Form eines rechtwinkligen Parallelepipedums von der Länge a, Breite b und Höhe oder Tiefe c (in Fußen) hat, geht leer m Fuße tief unter Wasser. Wie schwer kann derselbe beladen werden, damit noch β Fuß Bord bleiben?

Da der Raum, den der mit Q Pfunden beladene Prahm im Wasser einnimmt, $= ab(c-\beta)$ Kubikfuße beträgt, so vertreibt er eine Wasser-Menge, deren Gewicht $= ab(c-\beta)\cdot\gamma$ Pfunde, wenn γ das Gewicht eines Kubikfußes Wassers bedeutet, und so groß ist als das Gesammt-Gewicht des Prahms nebst der Ladung. Da derselbe leer m Fuße unter Wasser geht, so beträgt sein Gewicht $abm\gamma$ Pfunde. Folglich ist die Ladung $Q = ab(c-\beta-m)\cdot\gamma$ Pfunde; wie solches auch schon daraus hervorgeht, daß er sich durch die Laduug um $c-\beta-m$ Fuße gesenkt hat.

Bayerische Staatsbibliothek München

ehrbuch der ges. mechan. Wissensch. Taf. I.




47.
70.
69.
71.
51.
0.
O
X
Y
P
P'
R
dM
N.dt
r
x
y
K M L
A J N H D E
B C
O
Q
F G
β
∝
R+Q
B'
G'
G H
K
x₀
x
X'
y₀
y'₀
x'₀
x'
y'
S
m
π
Y'

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Kurzes Elementar-Lehrbuch der gesammten mechanischen Wissenschaften für hö
here Bürger-, technische, Gewerb- und Militär-Schulen mit vielen Uebungs-
Beispielen

Berlin 1840

Phys.g. 628 f
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10132413-1